Л. Г. Шнирельман, Об аддитивных свойствах чисел, *УМН*, 1940, выпуск 7, 7–46

ОБ АДДИТИВНЫХ СВОЙСТВАХ ЧИСЕЛ *).

Л. Г. Шнирельман.

Введение.

Общей проблемой аддитивной теории чисел является возможность представления всех натуральных чисел с помощью ограниченного количества слагаемых из некоторой заданной последовательности натуральных чисел, например, последовательности простых чисел или последовательности p-х степеней. В настоящей статье этот вопрос, т. е. вопрос о том, когда возможно представление всех натуральных чисел с помощью чисел некоторой произвольной последовательности натуральных чисел, исследуется с общей точки зрения. Главным орудием при этом являются понятие плотности и понятие суммарной последовательности.

Последовательность натуральных чисел имеет „положительную плотность", если отношение числа $N(x)$ членов последовательности, не превосходящих x, к x для всех x остается бóльшим или равным α, где α — некоторое фиксированное положительное число. Под суммарной последовательностью nF заданной последовательности F мы понимаем последовательность чисел $f_1 + f_2 + \ldots + f_n$, где f_i пробегает все числа из F и 0, причем все f_i одновременно не равны нулю.

Примеры: арифметическая прогрессия имеет положительную плотность; напротив, последовательность простых чисел не имеет положительной плотности, так как указанное выше отношение является величиной порядка $\frac{1}{\ln x}$; последовательность p-х степеней всех натуральных чисел (p — целое > 1) точно так же не имеет положительной плотности, так как для нее это отношение есть величина порядка $x^{-\frac{p-1}{p}}$.

Легко показать, что с помощью членов последовательности положительной плотности, содержащей число 1, можно аддитивно представить, пользуясь ограниченным числом слагаемых, все натуральные числа. Поэтому нашей целью является дать для произвольных последовательностей достаточный признак того, чтобы при некотором n суммарная последовательность nF имела положительную плотность. Это удается сделать в двух общих случаях:

---

*) Über additive Eigenschaften von Zahlen. Mathematische Annalen, т. 107 (1933), стр. 649—690.

1. Если члены f_n последовательности F, равно как число $B(z)$ решений уравнения $f_i + f_j = z$ в числах f_i, f_j последовательности F, не слишком сильно возрастают; точно говоря, если

$$f_n = O(n\varphi(n)) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\sum_{z=1}^{x} B^2(z) = O\left(\frac{x^3}{\varphi^4(x)}\right),$$

где $\varphi(x)$ — положительная возрастающая функция. Мы покажем с помощью метода Бруна-Радемахера, что для последовательности простых чисел эти условия выполняются.

2. Если выполнено следующее условие:

Пусть $A_i(x)$ обозначает число представлений числа i в виде суммы u членов n_ν последовательности F, не превосходящих x (u — фиксированное натуральное число), и пусть

$$D(x) = \sum_{j=1}^{x} A_j^2(x).$$

Если при подходяще выбранном u

$$D(x) = O\left(\frac{N\left(\frac{x}{u}\right)^{2u}}{x}\right), \tag{1}$$

где $N(x)$ — число членов n_ν последовательности F, не превосходящих x, то мы можем показать, что uF имеет положительную плотность.

$D(x)$ мы можем оценить с помощью аналитически более удобной функции. Положим

$$f(x, y) = \sum_{\nu=1}^{k} e^{2\pi i n_\nu y},$$

где n_k — наибольший член последовательности F, не превосходящий x. Тогда, очевидно,

$$|f^{2u}(x, y)| = \sum_{j=1}^{un_k} A_j^2(x) + 2 \sum_{\substack{j, l=1 \\ j \neq l}}^{un_k} A_j(x) A_l(x) \cos 2\pi y (j - l)$$

и, следовательно,

$$\int_0^1 |f(x, y)|^{2u} dy = \sum_{j=1}^{un_k} A_j^2(x) \geqslant \sum_{j=1}^{x} A_j^2(x) = D(x).$$

Основываясь на этой фундаментальной формуле, мы покажем, что для последовательности p-х степеней $D(x)$ удовлетворяет неравенству (1).

Нетрудно видеть, что вместо интегрального представления для $D(x)$ можно воспользоваться аналогичным представлением в виде суммы; тогда, с помощью неравенства Вейля или неравенства ван-дер-Корпута, играющих решающую роль и в доказательствах теоремы Варинга, предложенных Харди-Литтльвудом и Виноградовым, можно легко показать, что для этого представления соотношение (1) выполняется. Тем самым получается новое доказательство теоремы Варинга.

Последовательности положительной плотности.

Простейшей и наиболее естественной характеристикой последовательности как целого является ее „плотность". Последовательности с большой плотностью образуют простейший класс последовательностей, для которых аддитивные свойства доказываются еще вполне элементарно.

Установим для дальнейшего некоторые определения и обозначения.

Определение 1. Последовательность F натуральных чисел называется *последовательностью положительной плотности* $\geqslant \alpha$ относительно натурального ряда, или, кратко, *плотной последовательностью*, если существует такое положительное число α, зависящее только от F, что

$$\frac{N(x)}{x} \geqslant \alpha. \tag{1}$$

(При этом $N(x) = N_F(x)$ обозначает число членов последовательности F, не превосходящих x. Неравенство (1) должно выполняться для всех x. Таким образом последовательность должна содержать, в частности, число 1.)

Мы будем писать

$$D(F) \geqslant \alpha.$$

Определение 2. Последовательность натуральных чисел называется *последовательностью почти положительной плотности* или *почти плотной последовательностью*, если

$$\lim_{x \to \infty} \frac{N(x)}{x} = \alpha > 0. \tag{2}$$

Определение 3. Последовательность натуральных чисел называется *последовательностью сильно положительной плотности*, если для каждой пары чисел $\rho > 0$, $\sigma > 0$

$$\frac{N(z, x)}{z - x} > \alpha - \sigma \text{ при } x \geqslant x_0(\rho, \sigma), \quad z \geqslant (1 + \rho)x, \tag{3}$$

где $N(x, y)$ обозначает число членов последовательности F, заключенных в интервале $x \leqslant z \leqslant y$, а α не зависит от ρ (впрочем, как нетрудно видеть, достаточно потребовать выполнения неравенства

$$\frac{N(x, (1+\rho)x)}{\rho x} > \alpha - \sigma$$

при $x \geqslant x_0(\rho, \sigma)$); мы пишем: $SD(F) \geqslant \alpha$.

Определение 4. Последовательность F натуральных чисел называется *базисом натуральных чисел*, если существуют два целых числа a и m, зависящих только от F, обладающих следующим свойством: каждое целое число $x > 0$, делящееся на a, представимо в виде суммы не более чем m членов последовательности F. Тогда, в случае, если F содержит 1, каждое целое $x > 0$ может быть аддитивно представлено с помощью не более чем $m + a - 1$ членов последовательности F.

Определение 5. Последовательность F натуральных чисел называется *сильным базисом натуральных чисел*, если существуют три числа a, m и λ, зависящих только от F, причем a и m — целые, λ — вещественное, таких, что каждое число $x > 0$, делящееся на a, представимо в виде суммы не более чем m членов последовательности F, каждый из которых больше чем λx.

Определение 6. Подпоследовательность F_1 последовательности F называется *плотной подпоследовательностью относительной плотности* $\geqslant \alpha$, если

$$\frac{N_{F_1}(x)}{N_F(x)} \geqslant \alpha, \tag{4}$$

где α — фиксированное положительное число.

Определение 7. Последовательность натуральных чисел называется *устойчивым базисом натуральных чисел*, если не только она сама, но и каждая ее плотная подпоследовательность образует базис натуральных чисел.

Определение 8. Пусть даны последовательности $F_1, F_2, \ldots, F_n$, и f_k обозначает член последовательности F_k.

Последовательность различных, расположенных в возрастающем порядке, чисел вида $f_1 + f_2 + \ldots + f_n$, где $f_1, f_2, \ldots, f_n$ пробегают независимо друг от друга все члены последовательностей $F_1, F_2, \ldots, F_n$ и число 0 (не все $f_i = 0$), называется суммой последовательностей $F_1, F_2, \ldots, F_n$ и обозначается через $F_1 + F_2 + \ldots + F_n$. Если, в частности, $F_1 = F_2 = \ldots = F_n = F$, то сумма этих последовательностей обозначается через nF.

ЧАСТЬ I.

§ 1.

Последовательности положительной плотности.

Лемма 1. *Пусть $F_1, \ldots, F_k$ — последовательности плотностей*

$$D(F_1) \geqslant \alpha_1, \ \ldots, \ D(F_k) \geqslant \alpha_k.$$

Имеет место неравенство

$$1 - D(F_1 + \ldots + F_k) \leqslant (1 - \alpha_1) \ldots (1 - \alpha_k). \tag{5}$$

Доказательство. Обозначим через $f_{11}, f_{12}, \ldots, f_{1n}$ те члены последовательности F_1, которые не превосходят произвольно заданного числа x. Имеем $n \geqslant \alpha_1 x$.

Между каждой парой соседних членов f_{1i} и f_{1i+1}, разность которых превышает единицу, можно ввести отличное от нуля количество новых членов вида $f_{1i} + f_{21}, f_{1i} + f_{22}, \ldots$ Число членов вида $f_{1i} + f_{2j}$, которые могут быть введены таким образом между f_{1i} и f_{1i+1}, $i = 1, \ldots, n-1$, соответственно между f_{1n} и x (включая x, если $f_{1n} < x$), и которые отличны от f_{1i} и f_{1i+1}, не меньше чем $\alpha_2 (f_{1i+1} - f_{1i} - 1)$ для $i = 1, \ldots, n-1$, соответственно не меньше чем $\alpha_2 (x - f_{1n})$. Следовательно, полное число вновь введенных членов не меньше чем

$$\alpha_2 \sum_{i=1}^{n-1} (f_{1i+1} - f_{1i} - 1) + \alpha_2 (x - f_{1n}) = \alpha_2 (x - n).$$

Поэтому число членов суммы $F_1 + F_2$, не превосходящих x, не может быть меньше чем $n + \alpha_2 (x - n)$. Так как $n \geqslant \alpha_1 x$, то

$$n + \alpha_2 (x - n) \geqslant \alpha_1 x (1 - \alpha_2) + \alpha_2 x = (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2) x > 0,$$

т. е.

$$D(F_1 + F_2) \geqslant \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2, \quad 1 - D(F_1 + F_2) \leqslant (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2).$$

Повторным применением этого неравенства получаем вообще

$$1 - D(F_1 + \ldots + F_k) \leqslant (1-\alpha_1) \ldots (1-\alpha_k).$$

Теорема 1. *Пусть $k > 3$ и пусть заданы последовательности $F_1, \ldots, F_k$ плотностей $D(F_1) \geqslant \alpha_1, \ldots, D(F_k) \geqslant \alpha_k$. Если геометрическое среднее M чисел α_i удовлетворяет неравенству*

$$M = \sqrt[k]{\alpha_1 \ldots \alpha_k} \geqslant \frac{\ln(k-1)}{k-1}, \tag{6}$$

то сумма $F_1 + \ldots + F_k$ совпадает со всем натуральным рядом R.

Доказательство. По лемме 1

$$1 - D(F_1 + \ldots + F_{k-1}) \leqslant (1-\alpha_1) \ldots (1-\alpha_{k-1}) < e^{-(\alpha_1 + \ldots + \alpha_{k-1})}.$$

Отсюда для $F = F_1 + \ldots + F_{k-1}$ имеем

$$x - N_F(x) < xe^{-(\alpha_1 + \ldots + \alpha_{k-1})}. \tag{7}$$

Кроме того, мы имеем $N(x) \geqslant \alpha_k x$, где положено $N_{F_k}(x) = N(x)$. Пусть $F_k = (n_1, n_2, \ldots)$. Последовательности

$$n_1, n_2, \ldots \quad \text{и} \quad x - n_1, \quad x - n_2, \ldots,$$

очевидно, имеют между нулем и x по одинаковому числу членов. Поэтому последовательность $x - n_1, x - n_2, \ldots$ имеет между нулем и x самое меньшее $\alpha_k x$ членов. Если $N_F(x) + N(x) > x$, то по крайней мере один член последовательности $x - n_1, x - n_2, \ldots$ должен быть равен какому-либо члену последовательности F или нулю, т. е. число x должно быть членом последовательности $F_1 + \ldots + F_k$.

Для выполнения неравенства $N_F(x) + N(x) > x$ для всех x достаточно, в силу (7), выполнения неравенства

$$\alpha_k > e^{-\sum\limits_{i=1}^{k-1} \alpha_i} \quad \text{или} \quad \ln\frac{1}{\alpha_k} < \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i.$$

В силу симметрии мы можем вместо k взять любое из чисел $1, 2, \ldots, k$. Таким образом каждое неравенство вида

$$\ln\frac{1}{\alpha_i} < \sum_{j \neq i} \alpha_i \quad (i = 1, \ldots, k) \tag{8}$$

является достаточным условием для соотношения

$$F_1 + \ldots + F_k = R. \tag{8a}$$

Суммируя эти неравенства, мы получим

$$\ln\prod_{i=1}^{k} \frac{1}{\alpha_i} < (k-1) \sum_{j=1}^{k} \alpha_j. \tag{9}$$

Легко видеть, что также (9) представляет собой достаточное условие для

$$F_1 + \ldots + F_k = R.$$

Действительно, из (9) вытекает, что выполнено по крайней мере одно из неравенств (8). Из известного неравенства между геометрическим и арифметическим средними вытекает, что (9) выполняется, если имеет место неравенство

$$(k-1)\sqrt[k]{\prod_{i=1}^{k} \alpha_i} > \frac{1}{k} \ln \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{\alpha_i} = \ln \sqrt[k]{\prod_{i=1}^{k} \frac{1}{\alpha_i}}. \tag{10}$$

Обозначая $\frac{1}{\sqrt[k]{\Pi\alpha_i}}$ через z, мы получаем для z неравенство $z \ln z < k-1$ (z, очевидно, может быть принято бо́льшим единицы; при $z = 1$ утверждение теоремы тривиально).

Это неравенство наверное будет выполнено, если

$$1 < z \leqslant \frac{k-1}{\ln(k-1)}, \quad k > 3.$$

Последнее неравенство мы можем записать также следующим образом:

$$\sqrt[k]{\Pi\alpha_i} \geqslant \frac{\ln(k-1)}{k-1}.$$

При $k = 1, 2, 3$ это неравенство непригодно. В первом случае для выполнения соотношения $F_1 = R$, очевидно, необходимо равенство $D(F_1) = 1$, а во втором случае для выполнения соотношения $F_1 + F_2 = R$ по проведенному выше рассуждению достаточно неравенства $D(F_1) + D(F_2) > 1$, ибо тогда $N_{F_1}(x) + N_{F_2}(x) > x$.

Соответственным образом доказываются следующие теоремы:

I,1. *Каждая последовательность F положительной плотности $\geqslant \alpha$ образует базис натуральных чисел, удовлетворяя соотношению* $4\left[\frac{1}{\alpha}\right] F = R$.

I,2. *Каждая последовательность F почти положительной плотности образует базис натуральных чисел.*

Доказательство. По определению почти положительной плотности существует такое число $x_0 = x_0(\varepsilon)$, что для каждого $x > x_0$ выполняется неравенство

$$\frac{N(x)}{x} > \alpha - \varepsilon = \beta$$

(для произвольно малого $\varepsilon > 0$).

Присоединяя к F все числа от 1 до $x_0(\varepsilon)$ включительно, мы получим последовательность F_1, очевидно обладающую положительной плотностью $\geqslant \beta$.

Для $h = 4\left[\frac{1}{\beta}\right]$ имеем $hF_1 = R$.

В самом деле, если $\beta > \frac{1}{2}$, т. е. $1 \leqslant \frac{1}{\beta} < 2$, $h = 4$, то $2D(F_1) > 1$, и, следовательно, $2F_1 = R$, по заключительному замечанию к теореме 1.

В противном случае для доказательства соотношения $hF_1 = R$ достаточно, на том же основании, показать, что $D\left(\frac{h}{2} F_1\right) = b > \frac{1}{2}$. Так как, по лемме 1,

$1-b \leqslant (1-\beta)^{\frac{h}{2}}$, то достаточно показать, что $\frac{h}{2}(-\ln(1-\beta)) > \ln 2$ или $\frac{h}{2}\beta > \ln 2$. Но эти неравенства действительно выполняются, так как $\frac{h}{2} \geqslant 2\left(\frac{1}{\beta}-1\right)$ и $\beta \leqslant \frac{1}{2} < 1-\frac{\ln 2}{2}$. (Можно, впрочем, доказать, что уже $\frac{h}{2}F_1 = R$.)

Таким образом каждое x может быть представлено в виде суммы не более чем $4\left[\frac{1}{\beta}\right]$ членов последовательности F_1 и значит не более чем $4\left[\frac{1}{\beta}\right]$ членов F и слагаемого, не превышающего $4\left[\frac{1}{\beta}\right]x_0$. Обозначим последнее число $4\left[\frac{1}{\beta}\right]x_0$ через $A = A(\varepsilon)$; таким образом разность между каждыми двумя членами последовательности $4\left[\frac{1}{\beta}\right]F$ не превосходит по абсолютной величине $2A$, т. е. для каждого числа x можно найти такие два члена x_1 и x_2 последовательности $4\left[\frac{1}{\beta}\right]F$, что $0 < x_2 - x_1 \leqslant 2A$, $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$. Имеем тождественно

$$x = \frac{x_1(x_2-x)+x_2(x-x_1)}{x_2-x_1}.$$

Обозначим через u наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \ldots, 2A$. Имеем

$$ux = \frac{u(x_2-x)}{x_2-x_1}x_1 + \frac{u(x-x_1)}{x_2-x_1}x_2.$$

Числа $\frac{u(x_2-x)}{x_2-x_1}$ и $\frac{u(x-x_1)}{x_2-x_1}$ — оба целые, $\geqslant 0$ и $\leqslant u$. Таким образом каждое число вида ux представимо в виде суммы не более чем $8\left[\frac{1}{\beta}\right]u$ членов последовательности F. Тем самым обе теоремы доказаны.

I,3. *Пусть* $k > 3$. *Если последовательность* F *имеет плотность* $\geqslant \alpha$ *и для некоторых целых* $a_1, \ldots, a_k$ *выполняется неравенство*

$$\frac{\alpha}{\sqrt[k]{a_1 \ldots a_k}} > \frac{\ln(k-1)}{k-1}, \tag{11}$$

то среди любых $k+1$ *последовательных чисел* $n, n+1, \ldots, n+k$ *можно найти по крайней мере одно* x, *для которого уравнение*

$$a_1 z_1 + \ldots + a_k z_k = x$$

разрешимо в числах z_i *последовательности* F.

Доказательство. Образуем последовательности $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ вида $1+a_1 f_1$, $1+a_2 f_2, \ldots, 1+a_k f_k$, где $f_1, f_2, \ldots, f_k$ пробегают все числа последовательности F и 0. Имеют место неравенства

$$D(\Phi_1) \geqslant \frac{\alpha}{a_1}, \ldots, D(\Phi_k) \geqslant \frac{\alpha}{a_k}.$$

Отсюда, по (11) и теореме 1, следует, что уравнение $x = \varphi_1 + \ldots + \varphi_k$, где φ_i обозначает член последовательности Φ_i или 0, всегда разрешимо. Тем самым утверждение I,3 доказано.

§ 2.

Последовательности сильно положительной плотности.

Лемма 2. *Пусть F — последовательность сильно положительной плотности $\geqslant \alpha$. Для любых заданных положительных чисел ρ и σ можно найти число x_0, зависящее только от этих чисел и от F, такое, что для $x \geqslant x_0$ между x и $(1+\rho)x$ (включая границы) существует число y, обладающее тем свойством, что для $z > y$ выполняется неравенство*

$$\frac{N(y,z)}{z-y} > \alpha - \sigma; \tag{12}$$

при этом $N(y, z)$ обозначает число членов f_n последовательности F, заключенных в пределах $y \leqslant f_n \leqslant z$.

Доказательство. Выберем столь большое x, чтобы для $z \geqslant (1+\rho)x$ выполнялось неравенство

$$\frac{N(x,z)}{z-x} \geqslant \alpha - \frac{\sigma}{2}. \tag{13}$$

Имеем

$$N(x, x_1) + N(x_1, x_2) \geqslant N(x, x_2). \tag{14}$$

Предположим, что лемма 2 неверна. Значит, существует число $x_1 > x_0$, удовлетворяющее соотношению $N(x, x_1) \leqslant (\alpha - \sigma)(x_1 - x)$. Если x_1 само $\geqslant (1+\rho)x$, то, в силу (13), мы уже имеем противоречие. Если же $x_1 < (1+\rho)x$, то мы снова можем найти еще большее число x_2 со свойством $N(x_1, x_2) \leqslant (\alpha - \sigma)(x_2 - x_1)$ и т. д.

После конечного числа шагов мы придем к числу x_n, которое $\geqslant (1+\rho)x$ (так как мы можем брать x_i целыми) и для которого имеет место неравенство

$$N(x, x_n) \leqslant N(x, x_1) + \ldots + N(x_{n-1}, x_n) \leqslant$$
$$\leqslant (\alpha - \sigma)(x_1 - x + x_2 - x_1 + \ldots + x_n - x_{n-1}) = (\alpha - \sigma)(x_n - x),$$

что, однако, в силу (13), невозможно.

Теорема 2. *Пусть даны последовательности $F_1, F_2, \ldots, F_k$, $k > 3$, сильно положительных плотностей*

$$SD(F_1) \geqslant \alpha_1, \ldots, \quad SD(F_k) \geqslant \alpha_k.$$

Если выполнено неравенство

$$\sqrt[k]{\alpha_1 \ldots \alpha_k} > \frac{\ln(k-1)}{k-1}, \tag{14a}$$

то каждое целое $x > 0$ можно представить в виде суммы k слагаемых, таких, что 1) все они $\geqslant \frac{x}{k+1}$ и 2) каждые два из них принадлежат к различным последовательностям $F_1, \ldots, F_k$. Таким образом $F_1 + \ldots + F_k$ есть сильный базис натуральных чисел.

Доказательство. Выберем столь малое $\sigma > 0$, чтобы еще сохранялось неравенство

$$\sqrt[k]{(\alpha_1 - \sigma) \ldots (\alpha_k - \sigma)} > \frac{\ln(k-1)}{k-1}. \tag{14b}$$

В силу леммы 2 можно найти столь большое целое число x_0, зависящее только от $F_1, \ldots, F_k$ и σ, чтобы для каждого $x > x_0$ в каждой последовательности F_i можно было выбрать член y_i, заключенный между $\frac{x}{k+1}$ и $\frac{x}{k}$, обладающий тем свойством, что для всякого $z > y_i$

$$\frac{N(y_i, z)}{z - y_i} > \alpha - \sigma.$$

Таким образом для последовательностей $F_1 - y_1, F_2 - y_2, \ldots, F_k - y_k$ выполняются неравенства

$$D(F_i - y_i) \geqslant \alpha_i - \sigma \quad (i = 1, \ldots, k)^{1)}.$$

Так как число $x - y_1 - y_2 - \ldots - y_k$, по выбору чисел y_i, положительно или равно нулю, то, по (14b) и теореме 1, оно представимо в виде суммы не более чем k членов $f_{i_1 j_1} - y_{i_1}, \ldots, f_{i_M j_M} - y_{i_M}$, где

$$f_{i_\nu j_\nu} \geqslant y_{i_\nu} \geqslant \frac{x}{k+1}.$$

Пусть нумерация последовательностей F_i выбрана так, что этими членами являются как раз M первых:

$$f_{1j_1} - y_1, \ldots, f_{Mj_M} - y_M.$$

Таким образом имеем

$$x - y_1 - \ldots - y_k = f_{1j_1} + \ldots + f_{Mj_M} - y_1 - \ldots - y_M.$$

Отсюда

$$x = f_{1j_1} + \ldots + f_{Mj_M} + y_{M+1} + \ldots + y_k.$$

В этой сумме из каждой последовательности F_i заимствован лишь один член, и все эти члены очевидно $\geqslant \frac{x}{k+1}$.

§ 3.

Слабо возрастающие последовательности.

Определение. Последовательность F называется *слабо возрастающей*, если суммарная последовательность $2F$ есть плотная последовательность, т. е. имеет положительную плотность.

Теорема 3. *Пусть дана последовательность* $F = (n_1 = 1, n_2, \ldots)$, *общий член которой удовлетворяет неравенству*

$$n_i < C i \varphi(i), \tag{15}$$

где C — константа и $\varphi(i)$ — положительная возрастающая функция.

Обозначим через $B(z) = B_F(z)$ число решений уравнения $n_i + n_j = z$ и через $R(x)$ — сумму

$$R(x) = \sum_{z=1}^{x} B^2(z). \tag{16}$$

1) При этом члены $\leqslant y_i$ последовательности F_i опускаются.

Если для последовательности F выполняется неравенство

$$R(x) < C_1 \frac{x^3}{\varphi^4(x)}, \tag{17}$$

то F 1) является слабо возрастающей последовательностью и 2) образует устойчивый базис натуральных чисел.

Доказательство. Число $N(z)$ членов последовательности F, не превосходящих некоторого определенного числа z, для $z > z_0$, в силу (15), больше чем

$$\frac{z}{2C\varphi(z)}, \tag{18}$$

ибо тогда

$$z < n_{N(z)+1} < C(N(z)+1)\,\varphi(N(z)+1) \leqslant 2CN(z)\,\varphi(z),$$

поскольку мы можем предполагать, что F не совпадает со всем натуральным рядом. С другой стороны, сумма $\sum\limits_{z=1}^{x} B(z)$ всех чисел решений уравнений $n_i + n_j = z$, $z = 1, \ldots, x$, т. е. число решений неравенства $n_i + n_j \leqslant x$, не меньше числа решений этого же неравенства при дополнительных условиях $n_i \leqslant \frac{x}{2}$, $n_j \leqslant \frac{x}{2}$. Последнее число, очевидно, равно $N^2\left(\frac{x}{2}\right)$. Отсюда, в силу (18), получаем для $x > 2z_0$

$$\sum_{z=1}^{x} B(z) \geqslant N^2\left(\frac{x}{2}\right) \geqslant \frac{x^2}{16C^2\varphi^2\left(\frac{x}{2}\right)} \geqslant \frac{x^2}{16C^2\varphi^2(x)}. \tag{19}$$

Обозначим через $M(x)$ число тех $B(z)$ для $z = 1, \ldots, x$, которые отличны от нуля.

Из неравенства Шварца вытекает (для $x > 2z_0$):

$$M(x) \geqslant \frac{\left(\sum\limits_{z=1}^{x} B(z)\right)^2}{\sum\limits_{z=1}^{x} B^2(z)} \geqslant \frac{x^4}{256C^4\varphi^4(x)} : C_1 \frac{x^3}{\varphi^4(x)} = \frac{x}{256C^4C_1}. \tag{20}$$

Последнее неравенство показывает, что число членов суммарной последовательности $2F$, не превосходящих x, будет для $x > 2z_0$ не меньше чем $\frac{x}{256C^4C_1}$. Поэтому последовательность $2F$ обладает положительной плотностью и, следовательно, по теореме I,1, является базисом натуральных чисел. Для доказательства правильности второго утверждения заметим, что для плотной подпоследовательности F_1 последовательности F, относительной плотности $\geqslant \alpha$, выполняются неравенства

$$\left.\begin{aligned} &\frac{N_{F_1}(x)}{N(x)} \geqslant \alpha \\ \text{и}\quad & \\ &B_{F_1}(z) \leqslant B(z), \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

так что неравенство (19) сохраняет силу с заменой $\frac{1}{16C^2}$ на $\frac{\alpha^2}{16C^2}$.

Теорема 4. *Пусть* $\varphi(i)$ *для* $i \geqslant i_0$ *положительна, возрастает, и* $\varphi(i) = O(\sqrt{i})$. *Пусть* F — *последовательность* $(n_1 = 1,\ n_2, \ldots)$,

$$n_i = O(i\varphi(i)). \tag{22}$$

Пусть $A(y, x)$, *для* $0 \leqslant y \leqslant x$, — *число решений уравнения* $n_i - n_j = y$, $n_i < x$, $n_j < x$.

Пусть

$$\sum_{y=1}^{x} A^2(y, x) = O\left(\frac{x^3}{\varphi^4(x)}\right). \tag{23}$$

Тогда F *является слабо возрастающей последовательностью и устойчивым базисом натуральных чисел*[2]).

Доказательство. Пусть $N(\xi)$ — число $n_i \leqslant \xi$. Тогда для $x \geqslant 2$, в силу (22),

$$\frac{x}{2} < n_{N\left(\frac{x}{2}\right)+1} < C_1\left(N\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)\varphi\left(N\left(\frac{x}{2}\right)+1\right) \leqslant 2C_1 N\left(\frac{x}{2}\right)\varphi(x); \tag{24}$$

следовательно, обозначая через $B(m)$ число решений уравнения $m = n_i + n_j$ и через $M(x)$ — количество $B(m) \neq 0$ для $m \leqslant x$, имеем

$$\frac{x^4}{C_2\varphi^4(x)} < N^4\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant \left(\sum_{m=1}^{x} B(m)\right)^2 \leqslant M(x)\sum_{m=1}^{x} B^2(m). \tag{25}$$

$B^2(m)$ есть число решений двойного уравнения

$$m = n_i + n_j = n_u + n_v; \tag{26}$$

при $i = u$ существует

$$B(m) \leqslant \frac{1 + B^2(m)}{2} \tag{27}$$

четверок чисел, удовлетворяющих этому уравнению; часть же величины $\sum\limits_{m=1}^{x} B^2(m)$, доставляемая такими четверками при $i \gtrless u$, не превосходит

$$2\sum_{y=1}^{x} A^2(y, x), \tag{28}$$

ибо при $i > u$ $y = n_i - n_u = n_v - n_j$ будет заключено в пределах $1 \leqslant y \leqslant x$, поскольку все $n_\omega \leqslant x$. Таким образом, в силу (23), для $x \geqslant x_0$

$$\sum_{m=1}^{x} B^2(m) \leqslant \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{x} B^2(m) + C_3\frac{x^3}{\varphi^4(x)}, \tag{29}$$

$$\frac{x^4}{C_2\varphi^4(x)} < M(x)\left(x + 2C_3\frac{x^3}{\varphi^4(x)}\right) < C_4 M(x)\frac{x^3}{\varphi^4(x)}, \tag{30}$$

т. е.

$$M(x) > \frac{x}{C_5}. \tag{31}$$

Что последовательность F образует также устойчивый базис натуральных чисел, можно доказать таким же точно образом, как и в заключительной части доказательства теоремы 3.

---

[2]) Эта, уточненная по сравнению с моей первоначальной, формулировка теоремы 4 равно как и следующее доказательство, даны Landau, Göttinger Nachrichten, 1930.

ПРИЛОЖЕНИЕ К ЧАСТИ I.

§ 4.

Последовательности, образующие устойчивые базисы натуральных чисел.

Теорема 5. *Пусть задана последовательность вида*

$$[r(n)] \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{32}$$

где $r(t)$ — вещественная, трижды диференцируемая функция вещественного переменного t, удовлетворяющая при $t > 0$ следующим неравенствам:

$$\left.\begin{array}{l} r(t) > 0, \quad r'(t) > 1, \\ 0 < \frac{c_1}{t \ln t} < r''(t) < \frac{c_2}{t} \text{ для } t > 1, \\ 0 > r'''(t) > -\frac{c_3}{t^2}. \end{array}\right\} \tag{33}$$

Тогда F образует устойчивый базис натуральных чисел.

Доказательство. 1. Предварительные замечания. Из (33) интегрированием получаем

$$c_1 \ln \ln t < r'(t) < c_4 \ln t \text{ при } t > 1. \tag{33a}$$

Обозначим через $\theta(t)$ производную $r'(t)$. По (33) имеем при $t > 1$

$$\frac{c_1}{t \ln t} < \theta'(t) < \frac{c_2}{t}, \quad 0 > \theta''(t) > -\frac{c_3}{t^2}. \tag{34}$$

Отсюда

$$\theta(t + \theta(t)) = \theta(t) + \theta'(t + \lambda\theta(t))\,\theta(t); \quad 0 < \lambda < 1.$$

Так как

$$\theta'(t + \lambda\theta(t)) < \frac{c_2}{t + \lambda\theta(t)} < \frac{c_2}{t},$$

то, в силу (33a), получаем

$$\theta(t + \theta(t)) - \theta(t) < \frac{c_2\theta(t)}{t} = o(1).$$

Обозначим через $u(x)$ функцию $\theta(e^x)$. Тогда

$$u'(x) = \theta'(e^x)\,e^x < \frac{c_2}{e^x}\,e^x = c_2. \tag{35}$$

Следовательно,

$$u(\ln t - 2\ln\theta(t)) =$$

$$= u(\ln t) - 2u'(\ln t - 2\lambda \ln\theta(t)) \ln\theta(t) > u(\ln t) - c' \ln\theta(t). \tag{36a}$$

Поэтому для θ мы получаем, в силу (33a), при $t \geqslant t_0$

$$\theta\left(\frac{t}{\theta^2(t)}\right) > \theta(t) - c' \ln\theta(t) > \frac{\theta(t)}{2}. \tag{36}$$

Обозначим через $\Psi(x)$ функцию, обратную к $\theta(x)$. Так как $\theta(x)$ монотонно возрастает, то также $\Psi(x)$ — монотонно возрастающая функция.

Имеем

$$\Psi[\theta(x)] = \theta[\Psi(x)] = x, \quad \Psi'[\theta(x)]\,\theta'(x) = 1.$$

Отсюда, в силу (34), следует

$$\frac{x}{c_2} < \Psi'[\theta(x)] = \frac{1}{\theta'(x)} < \frac{x \ln x}{c_1}$$

для $x > 1$.

Полагая здесь $\theta(x) = t$, получим

$$\frac{1}{c_2} \Psi(t) < \Psi'(t) < \frac{1}{c_1} \Psi(t) \ln \Psi(t). \tag{37}$$

Эта формула, равно как и формулы (38)—(41), имеет место для всех $t \geqslant t_0$, так как θ монотонно возрастает. Диференцируя еще раз, получаем

$$\Psi''[\theta(x)]\, \theta'^2(x) + \Psi'[\theta(x)]\, \theta''(x) = 0,$$

и, в силу (34),

$$\Psi''[\theta(x)] = -\frac{\Psi'[\theta(x)]\, \theta''(x)}{\theta'^2(x)} = -\frac{\theta''(x)}{\theta'^3(x)} < \frac{c_3 x^3 \ln^3 x}{x^2 c_1^3} = Mx \ln^3 x,$$

или, подставляя t вместо $\theta(x)$,

$$\Psi''(t) < M \Psi(t) \ln^3 \Psi(t). \tag{38}$$

Обозначим $\ln \ln \Psi(z)$ через $v(z)$. В силу (37) имеем

$$v'(z) = \frac{1}{\ln \Psi(z)} \frac{1}{\Psi(z)} \Psi'(z) < \frac{1}{c_1}.$$

Отсюда следует, для $\varepsilon > 0$,

$$v(z+\varepsilon) = v(z) + v'(z+\lambda\varepsilon)\,\varepsilon < v(z) + \frac{\varepsilon}{c_1},$$

и мы получаем для Ψ неравенство

$$\Psi(t+\varepsilon) = e^{e^{v(t+\varepsilon)}} < e^{e^{v(t)+\frac{\varepsilon}{c_1}}} = [\Psi(t)]^{e^{\varepsilon/c_1}}. \tag{39}$$

Из (37) и (38) мы получаем поэтому

$$\Psi'(t+\varepsilon) < \frac{1}{c_1} \Psi(t+\varepsilon) \ln \Psi(t+\varepsilon) < \frac{e^{\varepsilon/c_1}}{c_1} [\Psi(t)]^{e^{\varepsilon/c_1}} \ln \Psi(t) =$$

$$= M_2 [\Psi(t)]^{e^{\varepsilon/c_1}} \ln \Psi(t), \tag{40}$$

$$\Psi''(t+\varepsilon) < M_3 [\Psi(t)]^{e^{\varepsilon/c_1}} \ln^3 \Psi(t), \quad M_3 = Me^{3\varepsilon/c_1}. \tag{41}$$

2. Лемма 1. *Для числа $A(u)$ решений уравнения*

$$[r(n)] - [r(m)] = u \tag{42}$$

в целочисленных m и n с дополнительным условием $r(n) \leqslant x$, где u фиксировано и удовлетворяет условию

$$\ln^3 x\, \theta^3(x) \leqslant u \leqslant \ln^3 x\, \theta^4(x), \tag{43}$$

имеет место оценка $A(u) \leqslant C \frac{x}{\theta^2(x)}$ для $x > 1$.

Искомое число, очевидно, не может превосходить числа пар (n, m) целочисленных решений неравенств

$$u - 1 < r(n) - r(m) < u + 1, \quad r(n) \leqslant x; \tag{44}$$

при этом решения с одним и тем же m засчитываются только как одно решение, ибо (42) для каждого m имеет не более одного решения, поскольку $r'(x) > 1$. Мы рассмотрим поэтому число решений неравенств (44). Обозначим разность $n - m$ через $\varkappa$.

Имеем

$$r(n) - r(m) = r(m + \varkappa) - r(m) = r'(m)\,\varkappa + \frac{r''(m + \lambda\varkappa)}{2}\,\varkappa^2 \quad (0 < \lambda < 1).$$

Так как $r''(t) > 0$, $r'(t) > 1$, то для решения n, m неравенств (44) имеем

$$\varkappa < r(n) - r(m) < u + 1.$$

Из $\varkappa < u + 1 = O(\ln^3 x\, \theta^4(x)) = o(\sqrt{x})$ вытекает, что, каково бы ни было положительное число δ, число решений неравенств (44) не превосходит, для $x \geqslant x_0$, числа решений неравенств

$$u - 1 - \delta < r'(m)\,\varkappa < u + 1 + \delta, \quad r(m) \leqslant x,$$

или, иначе,

$$\frac{u - 1 - \delta}{\varkappa} < \theta(m) < \frac{u + 1 + \delta}{\varkappa}, \tag{44a}$$

т. е.

$$\Psi\left(\frac{u - 1 - \delta}{\varkappa}\right) < m < \Psi\left(\frac{u + 1 + \delta}{\varkappa}\right). \tag{44b}$$

Поэтому число возможных различных значений m при фиксированном $\varkappa$ не превосходит

$$\Psi\left(\frac{u + 1 + \delta}{\varkappa}\right) - \Psi\left(\frac{u - 1 - \delta}{\varkappa}\right) + 1. \tag{45}$$

Так как каждому значению m соответствует не более одного „решения", в указанном выше смысле, неравенств (44), то число „решений" (44), принадлежащих одному определенному значению $\varkappa$, не может превосходить (45).

Разобьем все возможные значения m на две группы:

$$\text{(a)} \quad m \leqslant \frac{x}{\theta^2(x)}, \qquad \text{(b)} \quad m > \frac{x}{\theta^2(x)}.$$

Общее число решений, соответствующих группе (a), очевидно, не превосходит числа значений m в этой группе, т. е.

$$\leqslant \frac{x}{\theta^2(x)}. \tag{45a}$$

Для решений, принадлежащих второй группе, из неравенств (44a), (36), (33a) и $\theta' > 0$ получаем

$$\left.\begin{aligned} \max \varkappa &< \frac{u + 1 + \delta}{\theta(\min m)} < \frac{u + 1 + \delta}{\theta\left(\frac{x}{\theta^2(x)}\right)} < \frac{u + 1 + \delta}{\theta(x) - c' \ln \theta(x)} \quad \left(< c_0 \frac{u}{\theta(x)}\right), \\ \min \varkappa &> \frac{u - 1 - \delta}{\theta(\max m)} > \frac{u - 1 - \delta}{\theta(x)} > c_0' \frac{u}{\theta(x)}. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Доказательство. Имеем, для решения m неравенства (44),

$$\int_1^m \theta(z)\, dz = r(m) - r(1) < x.$$

Поэтому для $m \geqslant 2$

$$x > \int_1^m \theta(z)\,dz \geqslant \int_{\frac{m}{2}}^m \theta(z)\,dz > \theta\left(\frac{m}{2}\right)\frac{m}{2},$$

так как $\theta(x) > 0$, $\theta'(x) > 0$ при $x > 0$; тем самым, так как в (b) $m > \frac{x}{\theta^2(x)}$, для $x \geqslant x_0$ будет

$$x > \frac{m}{2}\theta\left(\frac{x}{2\theta^2(x)}\right) > \frac{m}{4}\theta(x),$$

что получается, как в (36а) и (36). То-есть, в силу (44а), для $x \geqslant x_0$

$$\Psi\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right) < m < \frac{4x}{\theta(x)}. \tag{47a}$$

Число решений неравенств (44), принадлежащих к группе (b), в силу (44b), не превосходит следующей суммы:

$$\Sigma = \sum_{\min\varkappa \leqslant \varkappa \leqslant \max\varkappa}\left(\Psi\left(\frac{u+1+\delta}{\varkappa}\right) - \Psi\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right) + 1\right). \tag{47}$$

Таким образом для доказательства леммы 1 достаточно, в силу (45а), показать, что $\Sigma = O\left(\frac{x}{\theta^2(x)}\right)$. Имеем

$$\Psi\left(\frac{u+1+\delta}{\varkappa}\right) - \Psi\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right) =$$
$$= \Psi'\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right) 2\frac{1+\delta}{\varkappa} + \Psi''\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa} + \lambda\frac{2(1+\delta)}{\varkappa}\right) 2\frac{(1+\delta)^2}{\varkappa^2} \quad (0 < \lambda < 1),$$

и $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$, где

$$\left.\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum \Psi'\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right) 2\frac{1+\delta}{\varkappa}, \\ \Sigma_2 &= \sum\left\{\Psi''\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa} + \lambda\frac{2(1+\delta)}{\varkappa}\right) 2\frac{(1+\delta)^2}{\varkappa^2} + 1\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Лемма 2.

$$\Sigma_2 = o\left(\frac{x}{\theta^2(x)}\right).$$

Доказательство. Из (41) имеем, при $x \geqslant x_0$ и с $\rho = 2(1+\delta)\lambda$,

$$\Psi''\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa} + \lambda\frac{2(1+\delta)}{\varkappa}\right) < M_3\left[\Psi\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right)\right]^{e^{\rho/(c_1\varkappa)}} \ln^3\Psi\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right)$$

((41) применимо при $x \geqslant x_0$, так как, в силу (46),

$$\frac{u-1-\delta}{\varkappa} \geqslant c_0^*\theta(x) \geqslant t_0$$

при $x \geqslant x_0$). Далее, в силу (46), получаем

$$\left[\Psi\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right)\right]^{e^{\rho/(c_1\varkappa)}} = \Psi\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right)\left[\Psi\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right)\right]^{O\left(\frac{\rho}{c_1\varkappa}\right)} =$$
$$= \Psi\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right)\left[\Psi\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right)\right]^{O\left(\frac{1}{\varkappa}\right)} \leqslant$$
$$\leqslant \Psi\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right) x^{O\left(\frac{1}{\ln^3 x}\right)} < (1+\eta(x))\,\Psi\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right) \tag{48a}$$

(где $\eta(x) \to 0$ при $x \to \infty$), ибо

$$\Psi\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right) < m \leqslant x \tag{48b}$$

(так как $r(m) \leqslant x$ и $r > 0$, $r' > 1$) и

$$\varkappa \geqslant \frac{uc_0'}{\theta(x)} \geqslant c_0' \ln^3 x\, \theta^2(x) \geqslant c_0' \ln^3 x.$$

Поэтому, в силу (48b), мы получаем неравенство

$$\Psi''\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa} + \lambda \frac{2(1+\delta)}{\varkappa}\right) < M_4 x \ln^3 x.$$

Следовательно, каждый отдельный член суммы Σ_2, в силу (46), меньше, чем

$$M_4' x \ln^3 x \frac{2(1+\delta)^2}{(\min \varkappa)^2} < M_4'' \frac{x \ln^3 x}{\left(\frac{u}{\theta(x)}\right)^2} < M_5 \frac{x \ln^3 x\, \theta^2(x)}{u^2}.$$

Так как число всех членов в суммах Σ_1, Σ_2, в силу (46), не превосходит

$$\max \varkappa - \min \varkappa + 1 < c_1' \frac{u \ln \theta(x)}{\theta^2(x)} \tag{49}$$

и так как, в силу (33a), во всяком случае

$$\theta(x) < c_4 \ln x < c_5 \frac{u \ln \theta(x)}{\theta^2(x)},$$

то сумма Σ_2, в силу (33a) и (43), не превосходит

$$c_1'' \frac{u \ln \theta(x)}{\theta^2(x)} M_5 \frac{x \ln^3 x\, \theta^2(x)}{u^2} = c_1'' M_5 \frac{x \ln^3 x \ln \theta(x)}{u} = o\left(\frac{x}{\theta^2(x)}\right). \tag{49a}$$

Лемма 3.

$$\Sigma_1 = O\left(\frac{x}{\theta^2(x)}\right).$$

Доказательство. Определим прежде всего колебание S функции $\Psi'\left(\frac{u-1-\delta}{t}\right)$ при изменении t между $\varkappa$ и $\varkappa+1$, где $\min \varkappa \leqslant \varkappa < \max \varkappa$. Так как $\Psi'(v) > 0$, то, в силу (41),

$$S = \Psi''\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa+\lambda}\right) \frac{u-1-\delta}{(\varkappa+\lambda)^2} = \Psi''\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa+1} + \frac{(1-\lambda)(u-1-\delta)}{(\varkappa+1)(\varkappa+\lambda)}\right) \frac{u-1-\delta}{(\varkappa+\lambda)^2} <$$

$$< M_3 \left[\Psi\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right)\right]^{e^{\frac{(u-1-\delta)(1-\lambda)}{(\varkappa+1)(\varkappa+\lambda)c_1}}} \ln^3 \Psi\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right) \frac{u-1-\delta}{\varkappa^2}.$$

Как и в (48a), при $x \geqslant x_0$ последнее выражение, а потому также S, не будет, принимая во внимание (47a), превосходить

$$M_6 \Psi\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right) \ln^3 \Psi\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right) \frac{u-1-\delta}{\varkappa^2} < M_6 \frac{x \ln^3 x}{\theta(x)} \frac{u-1-\delta}{\varkappa^2}. \tag{50a}$$

Далее, для $\varkappa \leqslant t \leqslant \varkappa+1$ и $\varkappa < \max \varkappa$, так как

$$\Psi\left(\frac{u-1-\delta}{t}\right) \leqslant \Psi\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right) < m \leqslant x$$

(ибо $\Psi' > 0$), имеем, в силу (37),

$$\Psi'\left(\frac{u-1-\delta}{t}\right)(u-1-\delta)\left(\frac{1}{\varkappa^2}-\frac{1}{(\varkappa+1)^2}\right) \leqslant M'_6 u \frac{x \ln x}{(\min \varkappa)^3}. \tag{50b}$$

Разность между

$$\sum_{\min \varkappa \leqslant \varkappa \leqslant \max \varkappa} \Psi'\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right)\frac{u-1-\delta}{\varkappa^2}$$

и

$$\int\limits_{\min \varkappa}^{\max \varkappa} \Psi'\left(\frac{u-1-\delta}{t}\right)\frac{u-1-\delta}{t^2}\,dt = \int\limits_{\frac{u-1-\delta}{\max \varkappa}}^{\frac{u-1-\delta}{\min \varkappa}} \Psi'(z)\,dz,$$

в силу (50a, b) и (49) и принимая во внимание (46), (37) и (48b),

$$\leqslant \sum_{\min \varkappa \leqslant \varkappa \leqslant \max \varkappa} \int\limits_{\varkappa}^{\varkappa+1} \left| \Psi'\left(\frac{u-1-\delta}{t}\right)\frac{u-1-\delta}{t^2} - \Psi'\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa+1}\right)\frac{u-1-\delta}{(\varkappa+1)^2}\right| dt +$$
$$+ \Psi'\left(\frac{u-1-\delta}{\min \varkappa}\right)\frac{u-1-\delta}{(\min \varkappa)^2} < \left\{ M_6 \frac{x \ln^3 x}{\theta(x)}\left(\frac{u-1-\delta}{(\min \varkappa)^2}\right)^2 + u M'_6 \frac{x \ln x}{(\min \varkappa)^3}\right\} \frac{u c'_1 \ln \theta(x)}{\theta^2(x)} +$$
$$+ \Psi'\left(\frac{u-1-\delta}{\min \varkappa}\right)\frac{u-1-\delta}{(\min \varkappa)^2} < M_7 \frac{x \ln^3 x \ln \theta(x)}{\min \varkappa}. \tag{51}$$

Сумма Σ_1

$$\leqslant 2\,\frac{(1+\delta)\max \varkappa}{u-1-\delta} \sum_{\min \varkappa \leqslant \varkappa \leqslant \max \varkappa} \Psi'\left(\frac{u-1-\delta}{\varkappa}\right)\frac{u-1-\delta}{\varkappa^2}.$$

Разность между этой суммой и выражением

$$2(1+\delta)\frac{\max \varkappa}{u-1-\delta} \int\limits_{\frac{u-1-\delta}{\max \varkappa}}^{\frac{u-1-\delta}{\min \varkappa}} \Psi'(z)\,dz$$

будет, в силу (51), (46), (43) и (33a),

$$\leqslant 2(1+\delta)\frac{\max \varkappa}{u-1-\delta} M_7 \frac{x \ln^3 x \ln \theta(x)}{\min \varkappa} < M_8 \frac{\ln \theta(x)}{\theta(x)} \frac{x}{\theta^2(x)} = o\left(\frac{x}{\theta^2(x)}\right). \tag{52}$$

В силу (47a)

$$\frac{\max \varkappa}{u-1-\delta} \int\limits_{\frac{u-1-\delta}{\max \varkappa}}^{\frac{u-1-\delta}{\min \varkappa}} \Psi'(z)\,dz =$$

$$= \frac{\max u}{u-1-\delta}\left[\Psi(z)\right]_{\frac{u-1-\delta}{\max \varkappa}}^{\frac{u-1-\delta}{\min \varkappa}} < C_2 \frac{\Psi\left(\frac{u-1-\delta}{\min \varkappa}\right)}{\theta(x)} < C_3 \frac{x}{\theta^2(x)}, \tag{53}$$

чем лемма 3 доказана. Вся сумма (47) будет, в силу (48) и лемм 2, 3, величиной порядка

$$C\frac{x}{\theta^2(x)}. \tag{54}$$

Этим лемма 1 доказана.

Пусть $\alpha = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4C}\right)$.

Лемма 4. *Для каждого $x \geqslant x_0$ существует часть Φ последовательности F, содержащая $[\alpha\theta(x)] = A$ членов, лежащая вместе со своими разностями между a и b (включая границы), где*

$$a = \ln^3 x\, \theta^3(x) < b = \ln^3 x\, \theta^4(x).$$

Доказательство. При $x \geqslant x_0$ для каждого целого $k > 0$, удовлетворяющего условию $(k+1)a \leqslant b$, внутри интервала $(ka, (k+1)a)$ содержится по крайней мере один член последовательности F. В самом деле, пусть

$$r(\xi) = ka, \quad r(\eta) = (k+1)a, \quad \eta - \xi = t;$$

тогда

$$a = r(\eta) - r(\xi) = tr'(\xi + \lambda t) = t\theta(\xi + \lambda t) \quad (0 < \lambda < 1).$$

Так как (для больших x)

$$r(\eta) = (k+1)a \leqslant b < x$$

и

$$r(v) > 0, \quad r'(v) > 1 \text{ для } v > 0,$$

то, следовательно, $\eta < x$, т. е.

$$\theta(\xi + \lambda t) \leqslant \theta(\eta) \leqslant \theta(x);$$

значит, для $x \geqslant x_1$

$$t = \frac{a}{\theta(\xi + \lambda t)} \geqslant \frac{a}{\theta(x)} = \theta^2(x)\ln^3 x > 2.$$

Следовательно, существуют такие два целых числа n, $n+1$, что

$$ka = r(\xi) < r(n) < r(n+1) < r(\eta) = (k+1)a.$$

Вследствие $r'(v) > 1$ имеем $r(n) \leqslant [r(n+1)] \leqslant r(n+1)$, что и доказывает утверждение. Разобьем теперь интервал (a, b) на

$$\left[\frac{b-a}{2a}\right] = \left[\frac{\theta(x) - 1}{2}\right] \quad (\geqslant [\alpha\theta(x)] \text{ для } x \geqslant x_1 \quad (\geqslant x_0))$$

частных интервалов длины $2a$ каждый и выберем в левой половине каждого из $[\alpha\theta(x)]$ первых интервалов по члену последовательности F. Эти члены и образуют искомую часть Φ последовательности F. Тем самым лемма 4 доказана.

Теперь мы покажем, что $2F$ имеет почти положительную плотность. Для этого рассмотрим все числа $\varphi_i + f_j$, $i = 1, \ldots, A$, где f_j — числа из F, удовлетворяющие условию

$$f_j \leqslant x - \varphi_i,$$

а $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ — числа множества Φ леммы 4, расположенные в возрастающем порядке.

Лемма 5. *Число чисел $f_j \leqslant x - b$ (значит, также число чисел $f_j \leqslant x - \varphi_i$) для $x \geqslant x_0$ будет не меньшим, чем $\left[\frac{x}{\theta(x)}\right]$.*

Доказательство. Достаточно показать, что для $c=\frac{x}{\theta(x)}$ будет $r(c)\leqslant x-b$, так как тогда вследствие $r'(v)>1$ числа $[r(v)]$ $(v=1,\ldots,[c])$ образуют систему $[c]$ различных чисел $f_j\leqslant x-b$. Очевидно,

$$r(c)-r(1)=\int\limits_1^c \theta(y)\,dy=\int\limits_{\theta(1)}^{\theta(c)} z\Psi'(z)\,dz=z\Psi(z)\Big|_{\theta(1)}^{\theta(c)}-\int\limits_{\theta(1)}^{\theta(c)}\Psi(z)\,dz.$$

Так как между $\theta(1)$ и $\theta(c)$ всюду $\Psi(z)>0$, $\Psi'(z)>0$, и принимая во внимание неравенство $\theta''(z)<0$ при $z>1$, имеем для $x\geqslant x_0$:

$$\int\limits_{\theta(1)}^{\theta(c)}\Psi(z)\,dz>\int\limits_{\theta\left(\frac{c}{2}\right)}^{\theta(c)}\Psi(z)\,dz>\Psi\left(\theta\left(\frac{c}{2}\right)\right)\left(\theta(c)-\theta\left(\frac{c}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{c}{2}\,\theta'\left(\frac{c}{2}+\lambda\,\frac{c}{2}\right)\frac{c}{2}>c_1\frac{c}{2\ln c}\qquad(0<\lambda<1).$$

Таким образом, в силу (33a), во всяком случае

$$\int\limits_{\theta(1)}^{\theta(c)}\Psi(z)\,dz>\frac{x}{2\theta(x)}\,\frac{c_1}{\ln\frac{x}{\theta(x)}}>\ln^3 x\,\theta^4(x)+r(1)=b+r(1).$$

Тем самым

$$r(c)<c\theta(c)-b=\frac{x}{\theta(x)}\,\theta\left(\frac{x}{\theta(x)}\right)-b<\frac{x}{\theta(x)}\,\theta(x)-b=x-b,$$

и лемма 5 доказана.

Таким образом мы получаем не менее $[\alpha\theta(x)]\left[\frac{x}{\theta(x)}\right]$ формально различных выражений φ_i+f_j, не превосходящих числа x:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ \ \varphi_1+f_1,\quad \varphi_1+f_2,\quad\ldots,\quad \varphi_1+f_B,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (A)\ \varphi_A+f_1,\quad \varphi_A+f_2,\quad\ldots,\quad\varphi_A+f_B,\end{array}\right\}\quad \begin{array}{l}B=[c]=\left[\frac{x}{\theta(x)}\right],\\ \\ A=[\alpha\theta(x)].\end{array}\qquad(54a)$$

Число членов ν-й строки $(\nu=1,\ldots,A)$, отличных от всех членов, стоящих в предыдущих строках, будет для $x\geqslant x_0$ не меньше чем

$$\left[\frac{x}{\theta(x)}\right]-(\nu-1)\,C\,\frac{x}{\theta^2(x)}\qquad\left(\geqslant\frac{x}{\theta(x)}\left(\frac{1}{2}-\frac{C}{\theta(x)}(\nu-1)\right)\right).$$

Действительно, так как выбором подпоследовательности Φ по лемме 4 предположения леммы 1 удовлетворены, то число решений уравнения

$$f_n+\varphi_\nu=f_m+\varphi_\varkappa\quad(0<\varkappa<\nu;\quad \varkappa,\ \nu\ \text{фиксированы};\ f_m\leqslant x-b),\qquad(54b)$$

т. е. уравнения

$$f_m-f_n=\varphi_\nu-\varphi_\varkappa=u,$$

будет для $x\geqslant x_0$ не превосходить

$$C\,\frac{x-b}{\theta^2(x-b)}\leqslant C\,\frac{x}{\theta^2(x)}.$$

Поэтому число решений уравнений (54b) с фиксированным ν и произвольным $\varkappa$, удовлетворяющим условию $0<\varkappa<\nu$, будет не больше чем $C\frac{x}{\theta^2(x)}(\nu-1)$, т. е.

лишь столько членов ν-й строки из (54a) может встречаться уже в предыдущих строках. Тем самым общее количество различных выражений $\varphi_i + f_j$, $i \leqslant A = [\alpha\theta(x)]$, $j \leqslant B$, принимая во внимание, что α было выбрано $\leqslant \frac{1}{4C}$, будет для $x \geqslant x_0$ не меньше чем

$$\frac{x}{\theta(x)} \sum_{\nu=1}^{A} \left(\frac{1}{2} - (\nu - 1)\frac{C}{\theta(x)}\right) \geqslant \frac{x}{\theta(x)} \left(\frac{\alpha\theta(x)}{4} - C\frac{(\alpha\theta(x))^2}{2\theta(x)}\right) = x\frac{\alpha}{4}(1 - 2C\alpha) \geqslant x\frac{\alpha}{8},$$

т. е. для $x \geqslant x_0$

$$N_{2F}(x) \geqslant N_{F+\Phi}(x) \geqslant x\frac{\alpha}{8}.$$

Тем самым доказано, что $2F$ имеет почти положительную плотность. Поэтому, в силу теоремы I,2, $2F$, а значит и F, является базисом натуральных чисел. Что F образует устойчивый базис, получается как и в предыдущих теоремах, так как число решений (54b) для подпоследовательности не меньше числа решений для всей последовательности, а нижняя грань числа членов плотной подпоследовательности отличается от соответствующего числа для всей последовательности постоянным множителем. Тем самым теорема 5 доказана.

Пример. Каждое целое число можно разложить на 25 слагаемых вида $[n \ln n]$ и одно слагаемое, не превосходящее некоторого фиксированного числа.

В этом случае мы находим, что для $x \geqslant x_0$ число решений уравнения

$$[n \ln n] - [m \ln m] = u, \quad n \ln n < x$$

при

$$\theta^3(x) \ln^3 x < u < \theta^4(x) \ln^3 x \quad (\theta(x) = \ln x + 1)$$

не превосходит $3{,}1 \frac{x}{\ln^2 x}$.

Отсюда вытекает, что суммарная последовательность $[n \ln n] + [m \ln m]$ обладает почти положительной плотностью, большей, чем $\frac{1}{6{,}2}$. Отсюда, в силу теорем I,1 и I,2, и вытекает утверждение.

Точно так же можно доказать возможность разложения целых чисел на ограниченное число слагаемых вида $[\ln \Gamma(n)]$, $[n \ln \ln n]$ $(n \geqslant n_0)$ и т. д.

ЧАСТЬ II.

§ 1.

Последовательность простых чисел.

Теорема 6. *Последовательность $p_1 = 1$, $p_2, p_3, \ldots$, где p_i при $i > 1$ пробегает простые числа в возрастающем порядке, образует устойчивый базис натуральных чисел* *).

---

*) Этот результат, привлекший к себе внимание всего научного мира и представляющий собой одно из самых эффектных достижений метода Л. Г. Шнирельмана, был первым приближением к решению знаменитой проблемы Гольдбаха; из него непосредственно вытекает существование „постоянной Шнирельмана“ c; эта постоянная определяется как наименьшее натуральное число, удовлетворяющее тому условию, что всякое достаточно большое натуральное число n может быть представлено в виде $n = p_1 + p_2 + \ldots + p_c$, где каждое p_i — простое число или нуль. Первая, довольно грубая, оценка постоянной Шнирельмана была дана Н. П. Романовым („К проблеме Гольдбаха“, Известия НИИММ при Томском университете, т. 1 (1935), стр. 34—38); в 1936 г. Landau,

Лемма 1 (Viggo Brun)[3]. *Число $A(u, x)$ решений системы*

$$p_i - p_j = u, \tag{55}$$

$$p_i \leqslant x, \quad p_i \text{ — простое число},$$

для $x > x_1$ *и* $0 < u \leqslant x$ *меньше чем* $k_3 \frac{x}{\ln^2 x} S(u)$, *где*

$$S(u) = \prod_{\substack{p \geqslant 17 \\ p \mid u}} \frac{p}{p-2}.$$

Мы перенесем данный Радемахером[4]) вывод оценки $A(u, x)$ снизу на вывод оценки сверху.

Обозначим через

$$P(\Delta, D, x; a_1, b_1, p_1; \ldots; a_r, b_r, p_r) \tag{56}$$

количество чисел $z > 0$ вида $\Delta + Dt$, $t = 1, 2, \ldots$, не превосходящих x и не содержащихся ни в одной из прогрессий

$$a_i + t_i p_i, \quad b_j + t_j p_j \quad (i, j = 1, \ldots, r; \; t_i, t_j = 1, 2, \ldots),$$

удовлетворяющих, следовательно, соотношениям

$$p_i \nmid (z - a_i)(z - b_i) \quad (i = 1, \ldots, r). \tag{56a}$$

При этом Δ, D, a_i, b_i $(i = 1, \ldots, r)$ — фиксированные целые числа, $a_i \not\equiv b_i \pmod{p_i}$, $p_i \nmid D$, p_i — простые числа, расположенные в естественном порядке:

$$p_1 < p_2 < \ldots < p_r,$$

причем предполагается, что $p_1 > 5$. Если $r = 0$, значит не должно выполняться никакое соотношение (56a), то вместо (56) пишем $P(\Delta, D, x)$.

Heilbronn и Scherk („Alle grossen ganzen Zahlen lassen sich als Summe von höchstens 71 Primzahlen darstellen", Časopis pro pěstování Matematiky a Fysiky, т. 65 (1936), стр. 117—140) установили, что $c \leqslant 71$, а несколько месяцев спустя G. Ricci („Su la congettura di Goldbach e la costante di Schnirelmann", Boll. Un. Mat. Ital., т. 15 (1936), стр. 183—187) показал, что $c \leqslant 69$. Весной 1937 г. И. М. Виноградов, пользуясь иными, значительно более сильными методами, показал („Представление нечетного числа суммою трех простых чисел", ДАН СССР, т. XV, № 6—7 (1937), стр. 291—294; I. Vinogradow, Some theorems concerning the theory of primes, Матем. сборник, т. 2 (44) : 2 (1937), стр. 179—194), что для достаточно больших нечетных n число слагаемых может быть снижено до трех, откуда непосредственно следует $c \leqslant 4$; этим для нечетных n доказана гипотеза Гольдбаха (для четных n она требует снижения числа слагаемых с четырех до двух; более подробные сведения о всех этих работах читатель найдет в статье Н. Г. Чудакова „О проблеме Гольдбаха" в четвертом выпуске „Успехов математических наук").

Все эти последующие работы, разумеется, нисколько не снижают актуальности печатаемой статьи Л. Г. Шнирельмана, основоположное значение которой, как это подробнее указано во введении к настоящему циклу статей, состоит в создании новой и общей проблематики в аддитивной теории чисел и в отыскании общих методов решения задач этой новой области. *Ред.*

[3]) Viggo Brun, Le crible d'Eratosthène et le théorème de Goldbach, Videnskapsselskapets Skrifter, I, Math.-Naturw. Kl., 1920, No. 3, Kristiania.

[4]) Rademacher, Beiträge zur Viggo Brunschen Methode in der Zahlentheorie (I), Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität, т. 3 (1924), и Landau, Göttinger Nachrichten, 1930.

Так как нашей целью является получение оценки числа (56), совершенно не зависящей от Δ, a_i, b_j, то в последующем мы вместо (56) будем пользоваться более кратким способом записи:

$$P(D,\ x;\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_r). \tag{57}$$

Очевидно имеет место тождество

$$\begin{aligned} P(\Delta,\ D,\ x;\ p_1,\ldots,p_r) &= P(\Delta,\ D,\ x;\ p_1,\ldots,\ p_{r-1}) - \\ &- P(\Delta_r,\ Dp_r,\ x;\ p_1,\ldots,\ p_{r-1}) - P(\Delta_r',\ Dp_r,\ x;\ p_1,\ldots,\ p_{r-1}), \end{aligned} \tag{58}$$

так как лишние z, засчитанные в $P(\Delta,\ D,\ x;\ p_1,\ldots,p_{r-1})$, имеют вид

$$\left\{\begin{aligned} z &\equiv a_r \pmod{p_r} \\ &\equiv \Delta \pmod{D} \end{aligned}\right. \quad \text{или} \quad \left.\begin{aligned} z &\equiv b_r \pmod{p_r} \\ &\equiv \Delta \pmod{D} \end{aligned}\right\},$$

т. е.

$$z \equiv \Delta_r \pmod{Dp_r} \quad \text{или} \quad z \equiv \Delta_r' \pmod{Dp_r},$$

ибо $p_i \nmid D$. При этом вследствие $a_r \not\equiv b_r \pmod{p_r}$ классы вычетов, представляемые числами Δ_r, Δ_r', различны.

Мы будем это тождество символически записывать следующим образом:

$$P(D,\ x;\ p_1,\ldots,\ p_r) = P(D,\ x;\ p_1,\ldots,\ p_{r-1}) - 2P(Dp_r,\ x;\ p_1,\ldots,\ p_{r-1}). \tag{59}$$

Повторным применением этой записи получаем

$$\begin{aligned} P(D,\ x;\ p_1,\ldots,\ p_r) &= P(D,\ x) - 2P(Dp_1,\ x) - 2P(Dp_2,\ x;\ p_1) - \ldots \\ &\ldots - 2P(Dp_r,\ x;\ p_1,\ldots,\ p_{r-1}), \end{aligned} \tag{60}$$

и далее

$$\begin{aligned} &P(D,\ x;\ p_1,\ldots,\ p_r) = \\ &= P(D,\ x) - 2\sum_{\alpha=1}^{r} P(Dp_\alpha,\ x) + 4\sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{\beta<\alpha} P(Dp_\alpha p_\beta,\ x;\ p_1,\ldots,\ p_{\beta-1}). \end{aligned} \tag{61}$$

Оставляя в каждом члене последней суммы лишь те из простых чисел $p_1,\ldots,\ p_{\beta-1}$, входящих в $P(Dp_\alpha p_\beta,\ x;\ p_1,\ldots,\ p_{\beta-1})$, индексы которых не превосходят заданного $r_1 < r$, мы сумму не уменьшим. Таким образом

$$\begin{aligned} P(D,\ x;\ p_1,\ldots,\ p_r) &\leqslant P(D,\ x) - 2\sum_{\alpha=1}^{r} P(Dp_\alpha,\ x) + \\ &+ 4\sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{\beta<\alpha} P(Dp_\alpha p_\beta,\ x;\ p_1,\ldots,\ p_{\min(\beta-1,\ r_1)}). \end{aligned} \tag{62}$$

Наконец, если $r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n$ — последовательность индексов (определение ее будет дано ниже), такая, что

$$1 \leqslant r_n < r_{n-1} < \ldots < r_2 < r_1 < r,$$

то таким же образом имеем

$$P(D,\ x;\ p_1,\ldots,\ p_r) \leqslant P(D,\ x) - 2\sum_{\alpha=1}^{r} P(Dp_\alpha,\ x) + 4\sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{\beta<\alpha} P(Dp_\alpha p_\beta,\ x) - \ldots$$

$$\ldots - 2^{2n-1}\sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{\beta<\alpha}\sum_{\gamma=1}^{\min(\beta-1,\, r_1)}\sum_{\delta<\gamma}\cdots\sum_{\lambda=1}^{\min(\varkappa-1,\, r_{n-1})} P(Dp_\alpha p_\beta p_\gamma p_\delta\ldots p_\lambda,\ x)+$$

$$+2^{2(n-1)}\sum_{\alpha=1}^{r}\cdots\sum_{\lambda=1}^{\min(\varkappa-1,\, r_{n-1})}\sum_{\mu<\lambda} P(Dp_\alpha\ldots p_\lambda p_\mu,\ x;\ p_1,\ldots,p_{\min(\mu-1,\, r_n)}). \quad (63)$$

Выражение в правой части не уменьшится, если мы заменим в последней сумме слагаемое

$$P(Dp_\alpha\ldots p_\mu,\ x;\ p_1,\ldots,p_{\min(\mu-1,\, r_n)}) \quad \text{через} \quad P(Dp_\alpha\ldots p_\mu,\ x).$$

Так как

$$\left[\frac{x}{D}\right]\leqslant P(D,x)\leqslant\left[\frac{x}{D}\right]+1, \quad (64)$$

то получаем

$$P(D,\ x;\ p_1,\ldots,p_r)\leqslant\frac{x}{D}\left\{1-2\sum_{\alpha=1}^{r}\frac{1}{p_\alpha}+4\sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{\beta<\alpha}\frac{1}{p_\alpha p_\beta}-\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+2^{2n}\sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{\beta<\alpha}\cdots\sum_{\lambda=1}^{\min(\varkappa-1,\, r_{n-1})}\sum_{\mu<\lambda}\frac{1}{p_\alpha p_\beta\ldots p_\lambda p_\mu}\right\}+R, \quad (65)$$

где R — общее число слагаемых во всех суммах, причем необходимо помнить, что степени двойки указывают как символические коэфициенты на соединение различных однородных слагаемых. Обозначая через $E^{(i)}$ для $i=1,\ldots,2n$ сумму всех отдельных произведений, содержащих точно по i множителей $\frac{1}{p_j}$, и полагая

$$E=1-E^{(1)}+E^{(2)}-\ldots+E^{(2n)}, \quad (66)$$

получаем из (65)

$$P(D,\ x;\ p_1,\ldots,p_r)\leqslant\frac{x}{D}E+R. \quad (67)$$

Здесь

$$R\leqslant(2r+1)^2(2r_1+1)^2\ldots(2r_{n-1}+1)^2 \quad (68)$$

(причем положено $r_0=r$), как это непосредственно явствует из сравнения суммы в (65) с произведением

$$\left(1-\sum_{\alpha=1}^{r}\frac{2}{p_\alpha}\right)\left(1-\sum_{\beta=1}^{r-1}\frac{2}{p_\beta}\right)\left(1-\sum_{\gamma=1}^{r_1}\frac{2}{p_\gamma}\right)\left(1-\sum_{\delta=1}^{r_1-1}\frac{2}{p_\delta}\right)\ldots, \quad (68a)$$

где $\alpha,\beta,\ldots$ не связаны, как в (65), условием $\alpha>\beta>\gamma>\delta>\ldots$

Мы полагаем еще $r_{n+1}=0$ и обозначаем, для $m=1,\ldots,n+1$ и $i=1,2,\ldots$, через $E_m^{(i)}$ сумму всех тех входящих в (65) произведений, которые содержат точно по i множителей, причем индексы множителей превосходят r_m.

В случае $m\leqslant n$ это возможно лишь для $2m$ первых индексов i; следовательно, $E_m^{(i)}=0$ для $m\leqslant n$, $i>2m$, равно как и для $m=n+1$, $i>2n$. Мы полагаем, далее, для $m=1,\ldots,n+1$,

$$E_m=1-E_m^{(1)}+E_m^{(2)}-\ldots; \quad (69)$$

в случае $m \leqslant n$ сумма обрывается на члене $E_m^{(2m)}$, в случае $m = n+1$ — на члене $E_{n+1}^{(2n)}$. Имеем $E_{n+1} = E$.

Для перехода от E_{m-1} к E_m ($m = 2, \ldots, n+1$) мы обозначим элементарно-симметрические функции от

$$\frac{2}{p_{r_m+1}}, \frac{2}{p_{r_m+2}}, \ldots, \frac{2}{p_{r_{m-1}}} \quad \text{через} \quad S_m^{(1)}, S_m^{(2)}, \ldots \tag{70}$$

Для образования $E_m^{(i)}$ мы должны дать i первым индексам пробежать все системы значений $\alpha, \beta, \ldots, \alpha > \beta > \ldots$, превосходящих r_m. Это дает последовательно следующие возможности:

1. Ни один из i индексов не превосходит r_{m-1}; сумма этих членов есть $S_m^{(i)}$.

2. Лишь первый индекс превосходит r_{m-1}; это дает $E_{m-1}^{(1)} S_m^{(i-1)}$.

3. Лишь первые два индекса превосходят r_{m-1}; это дает $E_{m-1}^{(2)} S_m^{(i-2)}$.

. . . .

$i+1$. Все i индексов превосходят r_{m-1}; это дает $E_{m-1}^{(i)}$.

(Если $i \geqslant 2m-1$, то нужно принять во внимание лишь случаи от 1 до $2m-1$.)

Тем самым мы имеем

$$E_m^{(i)} = S_m^{(i)} + E_m^{(1)} S_m^{(i-1)} + \ldots + E_{m-1}^{(i)}. \tag{71}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} E_m = 1 &- (S_m^{(1)} + E_{m-1}^{(1)}) + (S_m^{(2)} + E_{m-1}^{(1)} S_m^{(1)} + E_{m-1}^{(2)}) - \ldots \\ &\ldots + (S_m^{(2m-2)} + E_{m-1}^{(1)} S_m^{(2m-3)} + \ldots + E_{m-1}^{(2m-2)}) - \\ &- (S_m^{(2m-1)} + E_{m-1}^{(1)} S_m^{(2m-2)} + \ldots + E_{m-1}^{(2m-2)} S_m^{(1)}) + \\ &+ (S_m^{(2m)} + E_{m-1}^{(1)} S_m^{(2m-1)} + \ldots + E_{m-1}^{(2m-2)} S_m^{(2)}). \end{aligned} \tag{72}$$

Сравним с этим произведение

$$\begin{aligned} E_{m-1} \sum_{\nu=r_m+1}^{r_{m-1}} \left(1 - \frac{2}{p_\nu}\right) &= (1 - E_{m-1}^{(1)} + E_{m-1}^{(2)} - \ldots)(1 - S_m^{(1)} + S_m^{(2)} - \ldots) = \\ &= 1 - (S_m^{(1)} + E_{m-1}^{(1)}) + (S_m^{(2)} + E_{m-1}^{(1)} S_m^{(1)} + E_{m-1}^{(2)}) - \ldots \\ &\ldots + (S_m^{(2m-2)} + E_{m-1}^{(1)} S_m^{(2m-3)} + \ldots + E_{m-1}^{(2m-2)}) - \\ &- (S_m^{(2m-1)} + E_{m-1}^{(1)} S_m^{(2m-2)} + \ldots + E_{m-1}^{(2m-2)} S_m^{(1)}) + \\ &+ (S_m^{(2m)} + E_{m-1}^{(1)} S_m^{(2m-1)} + \ldots + E_{m-1}^{(2m-2)} S_m^{(2)}) - \\ &- (S_m^{(2m+1)} + E_{m-1}^{(1)} S_m^{(2m)} + \ldots + E_{m-1}^{(2m-2)} S_m^{(3)}) + \ldots \end{aligned} \tag{73}$$

Ниже мы покажем, что индексы r_i можно выбрать так, что $S_m^{(i)}$ будут образовывать монотонно невозрастающую (при возрастании i) последовательность и все будут меньше единицы. Тогда выражения в скобках, начиная с момента, когда число содержащихся в них членов станет равным $2m-1$, будут монотонно невозрастающими; так как они берутся попеременно со знаком плюс и минус, то E_m, сложенное с ближайшим членом

$$-(S_m^{(2m+1)}+E_{m-1}^{(1)}S_m^{(2m)}+\ldots+E_{m-1}^{(2m-2)}S_m^{(3)}),$$

будет самое большее равно выражению (73). Вводя еще сокращенные обозначения

$$\Pi_m=\prod_{\nu=r_m+1}^{r_{m-1}}\left(1-\frac{2}{p_\nu}\right) \quad (m=1,\ldots,n+1), \tag{74}$$

где положено $r_0=r$, мы получим, таким образом,

$$E_m\leqslant E_{m-1}\Pi_m+(S_m^{(2m+1)}+E_{m-1}^{(1)}S_m^{(2m)}+\ldots+E_{m-1}^{(2m-2)}S_m^{(3)}), \tag{75}$$

в предположении, что $1>S_m^{(1)}\geqslant S_m^{(2)}\geqslant\ldots$

Первое из этих предполагаемых неравенств влечет за собой остальные. Действительно, для элементарно-симметрических функций $S^{(1)},\ldots,S^{(t)}$ от t различных между собой положительных величин выполняются неравенства Шлёмильха

$$\frac{S^{(1)}}{t}>\frac{2S^{(2)}}{(t-1)S^{(1)}}>\ldots>\frac{tS^{(t)}}{S^{(t-1)}},$$

из которых, с одной стороны, следует

$$S^{(1)}>\frac{S^{(2)}}{S^{(1)}}>\ldots>\frac{S^{(t)}}{S^{(t-1)}}$$

и значит в случае $S^{(1)}<1$

$$S^{(1)}>S^{(2)}>\ldots>S^{(t)}, \tag{76}$$

а с другой, вытекает

$$S^{(i)}<\frac{(S^{(1)})^i}{i} \quad \text{для } i>1. \tag{77}$$

Неравенства (76) показывают, что справедливость неравенства (75) будет обеспечена, если индексы r_m будут выбраны так, что для каждого m из ряда $2,\ldots,n+1$ сумма величин $\frac{2}{p_\nu}$ $(r_m<\nu\leqslant r_{m-1})$ окажется меньше единицы.

Выберем теперь, при фиксированном u, в качестве $p_1,\ldots,p_r$ r первых простых чисел, не входящих в u, в их естественном порядке. Пусть $p_1\geqslant 3$ таково, что существует $h_0>1$ с $\ln h_0<\frac{1}{2}$, для которого

$$\left.\begin{aligned} 1-\frac{2}{p_1}&>\frac{1}{h_0^2}, \\ p_1&>\frac{1}{\ln h_0}. \end{aligned}\right\} \tag{77a}$$

Пусть $h_0>h>1$.

В силу соотношения

$$\sum_{p\leqslant\omega}\frac{1}{p}=\ln\ln\omega+c_1+o(1) \tag{78}$$

и вытекающего отсюда соотношения

$$\prod_{3\leqslant p\leqslant\omega}\left(1-\frac{2}{p}\right)=\frac{c_2}{(\ln\omega)^2}+o\left(\frac{1}{(\ln\omega)^2}\right) \tag{79}$$

существует такое ω_0, что для $\omega > \omega_0$

$$\left.\begin{aligned} 0 < \sum_{\omega < p \leqslant \omega^h} \frac{1}{p} < \ln h_0, \\ \prod_{\omega < p \leqslant \omega^h} \left(1 - \frac{2}{p}\right) > \frac{2}{h_0^2}. \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

Если $p_r > \omega_0$, то мы определяем индексы r_m следующим образом. В качестве p_{r_1} берем наибольшее не входящее в u простое число $\leqslant p_r^{1/h}$, в качестве p_{r_2} — наибольшее не входящее в u простое число $\leqslant p_r^{1/h^2}$ и т. д., продолжая этот выбор индексов r_m до тех пор, пока еще $p_{r_m} > \omega_0$. Так как

$$\sum_{p_r^{1/h^\nu} < p \leqslant p_r^{1/h^{\nu-1}}} \frac{1}{p} > 0,$$

то, действительно, будет $r > r_1 > r_2 > \ldots$

Пусть p_{r_k} — наименьшее простое число, определяемое таким способом. В силу (80)

$$\left.\begin{aligned} 0 < \sigma_1 = \sum_{\nu = r_1+1}^{r} \frac{1}{p_\nu} < \ln h_0, \qquad \Pi_1 = \prod_{\nu = r_1+1}^{r} \left(1 - \frac{2}{p_\nu}\right) > \frac{1}{h_0^2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 < \sigma_k = \sum_{\nu = r_k+1}^{r_{k-1}} \frac{1}{p_\nu} < \ln h_0, \qquad \Pi_k = \prod_{\nu = r_k+1}^{r_{k-1}} \left(1 - \frac{2}{p_\nu}\right) > \frac{1}{h_0^2}. \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

Числа $r_{k+1}, \ldots, r_{n+1} = 0$ мы строим теперь последовательно, определяя каждое r_m $(m = k+1, \ldots, n+1)$ как наименьшее $\mu \geqslant 0$, для которого

$$0 < \sum_{\nu = \mu+1}^{r_{m-1}} \frac{1}{p_\nu} < \ln h_0, \tag{82}$$

$$\prod_{\nu = \mu+1}^{r_{m-1}} \left(1 - \frac{2}{p_\nu}\right) > \frac{1}{h_0^2} \tag{83}$$

(такое μ существует в силу (77а), так как $\frac{1}{p_{r_{m-1}}} < \ln h_0$, $1 - \frac{2}{p_{r_{m-1}}} > \frac{1}{h_0^2}$).

Также здесь полагаем

$$\sigma_m = \sum_{\nu = r_m+1}^{r_{m-1}} \frac{1}{p_\nu}, \quad \Pi_m = \prod_{\nu = r_m+1}^{r_{m-1}} \left(1 - \frac{2}{p_\nu}\right). \tag{83a}$$

Если же $p_r \leqslant \omega_0$, то все индексы r_m $(m = 1, \ldots, n+1)$ определяются последовательно как наименьшие $\mu \geqslant 0$, удовлетворяющие условиям (82) и (83), причем $r_0 = r$. Снова вводятся, для $m = 1, \ldots, n+1$, обозначения (83а).

Из (68) следует

$$R \leqslant p_r^2 p_{r_1}^2 \ldots p_{r_{n-1}}^2 \leqslant p_r^2 p_r^{2/h} \ldots p_r^{2/h^k} p_{r_{k+1}}^2 \ldots p_{n-1}^2 < C_3 p_r^{\frac{2h}{h-1}}, \tag{84}$$

где C_3 зависит только от h и h_0.

Основываясь на (75), мы будем рекуррентным путем оценивать $E_{n+1}=E$ сверху. Введем обозначение

$$\Phi_m = S_m^{(2m+1)} + E_{m-1}^{(1)} S_m^{(2m)} + \ldots + E_{m-1}^{(2m-2)} S_m^{(3)}, \quad m=2, \ldots, n+1. \tag{85}$$

Тогда, в силу (75) и (81), заключаем:

$$E_2 \leqslant E_1 \Pi_2 + \Phi_2 \leqslant \Pi_2 (E_1 + h_0^2 \Phi_2),$$

$$E_3 \leqslant E_2 \Pi_3 + \Phi_3 \leqslant \Pi_3 (E_2 + h_0^2 \Phi_3) \leqslant \Pi_2 \Pi_3 (E_1 + h_0^2 \Phi_2 + h_0^4 \Phi_3)$$

и т. д., наконец,

$$E = E_{n+1} \leqslant \Pi_2 \Pi_3 \ldots \Pi_{n+1} (E_1 + h_0^2 \Phi_2 + \ldots + h_0^{2n} \Phi_{n+1}). \tag{86}$$

Из (85), в силу (77), принимая во внимание, что

$$S_\nu^{(1)} = 2\sigma_\nu < 2 \ln h_0 < 1, \tag{87a}$$

и полагая для краткости $\tau = 2 \ln h_0$, получаем

$$\Phi_m \leqslant \frac{\tau^{2m+1}}{(2m+1)!} + E_{m-1}^{(1)} \frac{\tau^{2m}}{(2m)!} + \ldots + E_{m-1}^{(2m-2)} \frac{\tau^3}{3!}. \tag{87}$$

Из (71) таким же образом выводим

$$E_m^{(i)} \leqslant \frac{\tau^i}{i!} + E_{m-1}^{(1)} \frac{\tau^{i-1}}{(i-1)!} + \ldots + E_{m-1}^{(i)}. \tag{88}$$

В частности,

$$E_m^{(1)} \leqslant \tau + E_{m-1}^{(1)}, \tag{89}$$

и так как

$$E_1^{(1)} = 2\sigma_1 < \tau, \tag{89a}$$

то

$$E_m^{(1)} < m\tau. \tag{90}$$

Для получения оценки для Φ_m при произвольном m зафиксируем теперь какое-нибудь $m_0 \leqslant n+1$ и выберем постоянные c_0 и $\varkappa$ таким образом, чтобы

$$E_{m_0}^{(i)} < c_0 (\tau\varkappa)^i \quad \text{для} \quad i=1, \ldots, 2m_0 \ (\text{значит, для } i \geqslant 1). \tag{91}$$

Тогда из (88) получим, при $i \geqslant 1$,

$$E_{m_0+1}^{(1)} < \frac{\tau^i}{i!} + c_0 (\tau\varkappa)^i \left\{ \frac{\left(\frac{1}{\varkappa}\right)^{i-1}}{(i-1)!} + \frac{\left(\frac{1}{\varkappa}\right)^{i-2}}{(i-2)!} + \ldots + 1 \right\}. \tag{92}$$

Предполагая еще, что $c_0 \geqslant 1$, мы получим, таким образом,

$$E_{m_0+1}^{(i)} < c_0 e^{1/\varkappa} (\tau\varkappa)^i \quad \text{для} \quad i \geqslant 1, \tag{93}$$

и, продолжая так дальше,

$$E_m^{(i)} < c_0 e^{\frac{m-m_0}{\varkappa}} (\tau\varkappa)^i \quad \text{для} \quad m \geqslant m_0, \quad i \geqslant 1. \tag{94}$$

Тогда из (87) будет следовать для $m > m_0$

$$\Phi_m < \frac{\tau^{2m+1}}{(2m+1)!} + c_0 e^{\frac{m-m_0-1}{\varkappa}} (\tau\varkappa)^{2m+1} \left\{ \frac{\left(\frac{1}{\varkappa}\right)^{2m}}{(2m)!} + \ldots + \frac{\left(\frac{1}{\varkappa}\right)^{3}}{3!} \right\} <$$

$$< c_0 e^{\frac{m-m_0-1}{\varkappa}} \left(e^{1/\varkappa} - 1 - \frac{1}{\varkappa} - \frac{1}{2\varkappa^2}\right)(\tau\varkappa)^{2m+1}, \tag{95}$$

и значит из (86), в случае $e^{1/\varkappa} h_0^2 (\tau\varkappa)^2 < 1$, суммированием геометрической прогрессии получим

$$E < \Pi_2 \ldots \Pi_{n+1} \Bigg\{ E_1 + h_0^2 \Phi_2 + h_0^4 \Phi_3 + \ldots + h_0^{2m_0-2} \Phi_{m_0} +$$

$$+ \frac{h_0^{2m_0}\left(e^{1/\varkappa} - 1 - \frac{1}{\varkappa} - \frac{1}{2\varkappa^2}\right)}{1 - e^{1/\varkappa} h_0^2 (\tau\varkappa)^2} c_0 (\tau\varkappa)^{2m_0+3} \Bigg\}. \tag{96}$$

Для достижения здесь знаменателем дроби наибольшей возможной величины нужно положить $\varkappa = \frac{1}{2}$. Далее выбираем $m_0 = 1$. Затем берем $h_0 = 1{,}29$ и значит $\frac{2}{9} < \ln h_0 < 0{,}255$, $\frac{4}{9} < \tau < 0{,}51$.

Тогда $e^{1/\varkappa} h_0^2 (\tau\varkappa)^2 < 1$ и значит оценка (96) применима. Так как, в силу (89а), $E_1^{(1)} < \tau$, и, в силу (76),

$$E_1^{(2)} < E_1^{(1)} < \tau, \tag{96а}$$

то можно выбрать $c_0 = 9$. Тогда, принимая во внимание, что $\tau = 2 \ln h_0$, получим

$$E < \Pi_2 \ldots \Pi_{n+1} \left(E_1 + \frac{9(e^2 - 5) h_0^2 (\ln h_0)^5}{1 - (e h_0 \ln h_0)^2} \right). \tag{97}$$

Замечая еще, что, в силу (69) и (96а),

$$E_1 = 1 - E_1^{(1)} + E_1^{(2)} < 1 \tag{98}$$

и что

$$1 < h_0^2 \Pi_1,$$

получаем численную оценку для E:

$$E < 2{,}1\, \Pi_1 \Pi_2 \ldots \Pi_{n+1} = 2{,}1 \prod_{\nu=1}^{r} \left(1 - \frac{2}{p_\nu}\right) = 2{,}1\Pi. \tag{99}$$

Наконец, пусть еще

$$h = \frac{89}{69} < 1{,}29 = h_0. \tag{100}$$

Подставляя (99) и (84) в (67), получаем для $x \geqslant x_0$, если p_r — наибольшее простое число $\leqslant x^{1/9}$,

$$P(D, x; p_1, \ldots, p_r) < 2{,}1 \frac{x}{D} \Pi + c' p_r^{89/10} < k_0 x \left(\frac{\Pi}{D} + \frac{1}{\ln^2 x} \right). \tag{101}$$

Теперь мы можем доказать указанную в формулировке леммы 1 оценку числа $A(u, x)$ решений уравнения

$$p_i - p_j = u \qquad (p_i \leqslant x).$$

Мы можем применить рассмотренный процесс высеивания при фиксированном целом u, $0 < u \leqslant x$, к случаю

$$D = 1,\ a_i = 0,\ b_i = u,\ i = 1, \ldots, r \qquad (r \geqslant 0),$$

причем p_i $(i = 1, \ldots, r)$ пробегает все простые числа p из интервала $17 \leqslant p \leqslant x^{1/9}$, не входящие в u, так как $p_i \nmid D(a_i - b_i)$ $(i = 1, \ldots, r)$, а неравенства (77а) при выбранном нами h_0 выполнены для всех $p_1 > 5$. В силу (101) и (79), после высеивания, остается при $x \geqslant x_0$ не более

$$k_0 x \left(\prod_{17 \leqslant p \leqslant x^{1/9}} \left(1 - \frac{2}{p}\right) \frac{1}{\prod\limits_{\substack{17 \leqslant p \leqslant x^{1/9} \\ p \mid u}} \left(1 - \frac{2}{p}\right)} + \frac{1}{\ln^2 x} \right) < k_1 \frac{x}{\ln^2 x} (1 + S(u)) < k_2 \frac{x}{\ln^2 x} S(u)$$

$$\left(S(u) = \prod_{\substack{p \geqslant 17 \\ p \mid u}} \frac{p}{p-2} \right)$$

чисел. Так как $A(u, x)$ не больше суммы числа решений уравнения

$$a - b = u,\ 0 < a \leqslant x,\ p_i \nmid ab \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

(т. е. количества чисел a, для которых $p_i \nmid a(a-u)$, $0 < a \leqslant x$) с удвоенным числом простых чисел $\leqslant x^{1/9}$, то для $x \geqslant x_1$

$$A(u, x) < 2x^{1/9} + k_2 \frac{x}{\ln^2 x} S(u) < k_3 \frac{x}{\ln^2 x} S(u). \tag{102}$$

Тем самым лемма 1 доказана.

Лемма 2.

$$\sum_{u=1}^{x} S^2(u) < \varkappa x.$$

Доказательство. Положим

$$P(u) = \prod_{\substack{p \mid u \\ p \geqslant 17}} \left(1 + \frac{2}{p-1}\right);$$

тогда

$$\frac{S(u)}{P(u)} = \prod_{\substack{p \mid u \\ p \geqslant 17}} \frac{p}{p-2} \frac{p-1}{p+1} = \prod_{\substack{p \mid u \\ p \geqslant 17}} \frac{p^2 - p}{p^2 - p - 2} =$$

$$= \prod_{\substack{p \mid u \\ p \geqslant 17}} \left(1 + \frac{2}{p^2 - p - 2}\right) < \prod_{p=2}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{p^2 - p - 2}\right) = \varkappa_1. \tag{103}$$

Далее,

$$P^2(u) = \left(\sum \frac{2^\nu}{(p_{i_1} - 1) \ldots (p_{i_\nu} - 1)} \right)^2 = \sum 2^M \frac{2^M 2^{2(\nu - M)}}{(p_{i_1} - 1) \ldots (p_{i_M} - 1)(p_{i_{M+1}} - 1)^2 \ldots (p_{i_\nu} - 1)^2},$$

так как число разложений выражения

$$(p_{i_1} - 1) \ldots (p_{i_M} - 1)(p_{i_{M+1}} - 1)^2 \ldots (p_{i_\nu} - 1)^2$$

на два произведения с различными $p_i - 1$ равно 2^M. Тем самым

$$\sum_{u=1}^{x} P^2(u) = \sum_{17 \leqslant p \leqslant x} \left[\frac{x}{p_{i_1}\ldots p_{i_M} p_{i_{M+1}}\ldots p_{i_\nu}}\right] \frac{2^{2\nu}}{(p_{i_1}-1)\ldots(p_{i_M}-1)(p_{i_{M+1}}-1)^2\ldots(p_{i_\nu}-1)^2} \leqslant$$

$$\leqslant x \sum_{17 \leqslant p \leqslant x} \frac{2^{2\nu}}{(p_{i_1}-1)^2\ldots(p_{i_M}-1)^2(p_{i_{M+1}}-1)^2\ldots(p_{i_\nu}-1)^2} \leqslant$$

$$\leqslant x \sum_{17 \leqslant p \leqslant x} \frac{1}{(p_{i_1}-1)^{3/2}\ldots(p_{i_\nu}-1)^{3/2}} \leqslant$$

$$\leqslant x \prod_{p=2}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{(p-1)^{3/2}}\right) = \varkappa_2 x. \tag{104}$$

Следовательно, в силу (103) и (104),

$$\sum_{u=1}^{x} S^2(u) < \varkappa_1^2 \sum_{u=1}^{x} P^2(u) < \varkappa_1^2 \varkappa_2 x = \varkappa x. \tag{105}$$

Доказательство теоремы 6. В силу лемм 1 и 2 и (102) имеем для $x \geqslant x_2$

$$\sum_{u=1}^{x} A^2(u,\ x) < k_3^2 \frac{x^2}{\ln^4 x} \sum_{u=1}^{x} S^2(u) < k \frac{x^3}{\ln^4 x}. \tag{106}$$

Так как, по Чебышеву,

$$p_r < Cr \ln r, \tag{107}$$

то предположения теоремы 4 удовлетворены. Из нее вытекает утверждение теоремы 6.

Следствие. Простые числа арифметической прогрессии $at + b$, $t = 1, 2, \ldots$, образуют устойчивый базис натуральных чисел. Действительно, как известно, относительная плотность простых чисел из прогрессии $at + b$ относительно всей последовательности простых чисел равна $\frac{1}{\varphi(a)}$. Тем самым они образуют плотную подпоследовательность последовательности простых чисел.

§ 2.

Общий признак для устойчивого базиса.

Пусть дана произвольная последовательность $F = (n_1,\ n_2,\ \ldots)$ натуральных чисел. Пусть $x > 0$ и $n_\varkappa$ — наибольший член последовательности F, не превосходящий x; пусть

$$f(x,\ y) = \sum_{\nu=1}^{\varkappa} e^{2\pi i n_\nu y} \tag{108}$$

(для каждой фиксированной последовательности F эта сумма зависит лишь от двух переменных x и y).

Теорема 7. *Если для последовательности F можно найти целое число $u > 0$, зависящее только от F, такое, что для всех x выполняется неравенство*

$$\int_0^1 |f(x,\ y)|^{2u}\, dy < C \frac{\left(N\left(\frac{x}{u}\right)\right)^{2u}}{x}, \tag{109}$$

то F является устойчивым базисом натуральных чисел. [В (109) $C=C(u)$ есть независящая от x постоянная, а $N(z)=N_F(z)$, как и прежде, — число членов последовательности F, не превосходящих x.]

Доказательство. Пусть $A_i(x)$ — число представлений числа i в виде суммы u членов n_ν последовательности F с $n_\nu \leqslant x$.

$(f(x, y))^u$ имеет вид

$$\sum_{\nu=1}^{un_\chi} A_\nu(x)\, e^{2\pi i y\nu}, \tag{110}$$

и

$$|f(x, y)|^{2u} = \Big(\sum_{j=1}^{un_\chi} A_j(x) \cos 2\pi y j\Big)^2 + \Big(\sum_{j=1}^{un_\chi} A_j(x) \sin 2\pi y j\Big)^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{un_\chi} A_j^2(x) + \sum_{\substack{j,\, l=1\\ j\neq l}}^{un_\chi} 2A_j(x) A_l(x) \cos 2\pi y (j-l). \tag{111}$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^1 |f(x,y)|^{2u}\, dy = \sum_{j=1}^{un_\chi} A_j^2(x). \tag{112}$$

Так как $A_j(x)=0$ при $j>un_\chi$, то, в силу (109) и (112),

$$\sum_{j=1}^{x} A_j^2(x) \leqslant \sum_{j=1}^{un_\chi} A_j^2(x) < C\frac{\left(N\left(\frac{x}{u}\right)\right)^{2u}}{x}. \tag{113}$$

Далее,

$$\sum_{j=1}^{x} A_j(x) \geqslant \sum_{j=1}^{x} A_j\left(\frac{x}{u}\right). \tag{114}$$

Так как последняя сумма, очевидно, равна $\left(N\left(\frac{x}{u}\right)\right)^u$, то имеет место неравенство

$$\sum_{j=1}^{x} A_j(x) \geqslant \left(N\left(\frac{x}{u}\right)\right)^u. \tag{115}$$

Обозначим через $M(x)$ число $A_j(x)$, $j\leqslant x$, не равных нулю; тогда (по неравенству Шварца)

$$M(x) \geqslant \frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{x} A_j(x)\right)^2}{\sum\limits_{j=1}^{x} A_j^2(x)} \geqslant \frac{\left(N\left(\frac{x}{u}\right)\right)^{2u}}{C\frac{\left(N\left(\frac{x}{u}\right)\right)^{2u}}{x}} = \frac{x}{C}. \tag{116}$$

Последнее неравенство показывает, что последовательность uF обладает положительной плотностью $\geqslant \frac{1}{C}$, так как $N_{uF}(x) \geqslant M(x)$. Отсюда вытекает, что F образует базис.

Для доказательства того, что F образует также устойчивый базис, достаточно заметить, что для каждой плотной подпоследовательности последовательности F, относительной плотности $\geqslant \alpha$, левая часть (109), как явствует из (112), может лишь уменьшиться, так что условие (109) остается выполненным, если заменить постоянную C через $\frac{C}{\chi^{2u}}$.

Замечание. Условие (109) в формулировке теоремы 7 можно заменить следующим:

$$\frac{1}{x}\sum_{a=0}^{x-1}\left|f\left(x, \frac{a}{x}\right)\right|^{2u} < C\frac{\left(N\left(\frac{x}{u}\right)\right)^{2u}}{x}. \tag{117}$$

Действительно, полагая $A_j(x) = A_j$, имеем

$$\frac{1}{x}\sum_{a=0}^{x-1}\left|f\left(x, \frac{a}{x}\right)\right|^{2u} = \sum_{j=1}^{un_\chi} A_j^2 + \frac{2}{x}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{un_\chi}\sum_{l=1}^{un_\chi}\sum_{a=0}^{x-1} A_j A_l \cos 2\pi\frac{a}{x}(j-l). \tag{118}$$

Но

$$\frac{1}{x}\sum_{a=0}^{x-1}\cos 2\pi\frac{a}{x}(j-l) = \begin{cases}1\\ 0\end{cases},$$

смотря по тому, делится ли $j-l$ на x или не делится.

Следовательно, получаем

$$\frac{1}{x}\sum_{a=0}^{x-1}\left|f\left(x, \frac{a}{x}\right)\right|^{2u} \geqslant \sum_{j=1}^{un_\chi} A_j^2(x) = \int_0^1 |f(x, y)|^{2u}\, dy. \tag{119}$$

Если условие (117) выполнено, то, очевидно, выполнено также условие (109). Условие (117) можно записать также в форме

$$\sum_{a=0}^{x-1}\left|f\left(x, \frac{a}{x}\right)\right|^{2u} < C\left(N\left(\frac{x}{u}\right)\right)^{2u}. \tag{120}$$

§ 3.

Применение к обобщению теоремы Варинга.

Под теоремой Варинга понимают утверждение, что последовательность p-х (p — произвольное целое число > 0) степеней всех натуральных чисел образует базис натуральных чисел.

Эта теорема была впервые доказана Гильбертом (1908), затем Харди и Литтльвудом (1921) и Виноградовым (1924).

Имеет место следующая теорема, которую можно рассматривать как обобщение теоремы Варинга:

Теорема 8. *Последовательность степеней $F = (1^p, 2^p, \ldots)$ (p — произвольное положительное целое число) образует устойчивый базис натуральных чисел.*

Для доказательства этой теоремы мы покажем, что для последовательностей p-х степеней выполняется условие (117). При этом мы будем пользоваться известными методами оценок, развитыми уже в упомянутых выше доказательствах теоремы Варинга (например, в доказательстве Виноградова).

Формулировка лемм.

1. Неравенство Ландау-ван-дер-Корпута[5]. *Пусть $g(v)$ — вещественная диференцируемая функция переменной v, удовлетворяющая для $m \geqslant v \geqslant n$ (m, n — целые, $m > n$) условиям*

$$\left.\begin{array}{r} 0 < \theta < g'(v) < \pi, \\ 0 < g''(v), \end{array}\right\} \tag{121}$$

где θ — фиксированное число.

Тогда имеет место неравенство

$$\left|\sum_{v=n}^{m} e^{g(v)i}\right| < \frac{4\pi}{\theta}. \tag{122}$$

Неравенство Вейля[6]. *Пусть $P(k)$ — полином p-й степени относительно k со старшим коэфициентом γ.*

Имеет место неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{n} e^{P(k)2\pi i}\right|^{2^{p-1}} < 4^{2^{p-1}}\left(n^{2^{p-1}-1} + n^{2^{p-1}-p}\sum_{1 \leqslant h_i \leqslant n}\frac{1}{\{p!\,h_1\ldots h_{p-1}\gamma\}}\right), \tag{123}$$

где символ $\frac{1}{\{\alpha\}}$ обозначает меньшую из следующих двух величин: n и обратная величина расстояния α от ближайшего целого числа, а при целом α — число n.

2. Лемма. *Число $A = A(x, y)$ решений соотношений*

$$y \mid p!\,h_1\ldots h_{p-1},$$

$$0 < h_i \leqslant x^{1/p} \qquad (i = 1, \ldots, p-1),$$

где y, x, $p > 1$ — фиксированные положительные целые числа, для каждого $\varepsilon > 0$ не превосходит

$$c(\varepsilon, p)\frac{x^{\frac{p-1}{p}}}{y}\, y^{\varepsilon}, \tag{124}$$

где $c(\varepsilon, p)$ не зависит от x, y.

Доказательство. 1) Мы можем принять, что $y \leqslant x^{1/p}$. Действительно, для всех y

$$A(x, y) \leqslant c_1(p)\frac{x^{\frac{p-1}{p}}}{y}\, r(x), \tag{125}$$

где

$$r(x) = \max_{0 < m \leqslant p!\,x^{\frac{p-1}{p}}} B(m),$$

причем $B(m)$ обозначает число решений уравнения

$$p!\,h_1 \ldots h_{p-1} = m,$$

$$0 < h_i \leqslant x^{1/p} \qquad (i = 1, \ldots, p-1).$$

---

[5] См., например, Landau, Zahlentheorie, т. 1, стр. 341.

[6] См., например, Landau, Zahlentheorie, т. 1, стр. 253.

Но $p!\,x^{\frac{p-1}{p}} \leqslant x$ для $x \geqslant x_0(p)$; следовательно,

$$r(x) \leqslant \max_{m=1,\ldots,x} T^{p-1}(m),$$

где $T(m)$ обозначает число делителей m. Но для каждого $\varepsilon > 0$

$$T(m) \leqslant c_2(\varepsilon, p)\, m^{\frac{\varepsilon}{p(p-1)}}\ ^7);$$

таким образом при $y \geqslant x^{1/p}$ для больших x, а значит и для всех x (так как для каждого x существует лишь конечное число y, при которых $A(x, y)$ отлично от нуля), имеет место оценка вида

$$A(x, y) \leqslant c_3(\varepsilon, p)\frac{x^{\frac{p-1}{p}}}{y}\, x^{\varepsilon/p}, \tag{126}$$

$$\leqslant c_3(\varepsilon, p)\frac{x^{\frac{p-1}{p}}}{y}\, y^{\varepsilon},$$

так что мы можем ограничиться рассмотрением случая $y \leqslant x^{1/p}$.

2) Для наибольшего общего делителя (c, d) чисел c, d имеет место неравенство

$$(y, ab) \leqslant (y, a)(y, b).$$

Положим

$$y_0 = (y, p!);$$

следовательно, $y_0 \leqslant p!$, $y = y_0 z$. Тогда

$$A = A(x, y) \leqslant \frac{1}{y}\sum_{1 \leqslant h_i \leqslant x^{1/p}} (y, p!h_1 \ldots h_{p-1}),$$

$$\leqslant \frac{y_0}{y}\sum_{1 \leqslant h_i \leqslant x^{1/p}} (z, p!h_1 \ldots h_{p-1}),$$

$$\leqslant \frac{y_0}{y}\, p!\Bigl(\sum_{1 \leqslant h \leqslant x^{1/p}} (z, h)\Bigr)^{p-1}.$$

Мы разложим $\sum\limits_{0 < h \leqslant x^{1/p}} (z, h)$ на части Σ_p, разбивая интервал $0 < h \leqslant [x^{1/p}]$ на $\left[\frac{x^{1/p}}{z}\right]$ непересекающихся частичных интервалов, так, чтобы каждый из $\left[\frac{x^{1/p}}{z}\right]$ первых интервалов содержал по z последовательных целых чисел, а возможный дополнительный интервал содержал меньшее количество целых чисел. Первые $\left[\frac{x^{1/p}}{z}\right]$ частных сумм совпадают между собой, так что

$$A \leqslant \frac{y_0}{y}\, p!\Bigl(\Bigl[\frac{x^{1/p}}{z}\Bigr] + 1\Bigr)^{p-1}\Bigl(\sum_{h=1}^{z} (h, z)\Bigr)^{p-1}.$$

Имеем

$$\sum_{h=1}^{z} (h, z) = \sum_{f \mid z} f\varphi\Bigl(\frac{z}{f}\Bigr) \leqslant T(z)\, z, \tag{127}$$

---

^{7}) См., например, Landau, Zahlentheorie, т. 1, стр. 250.

где $\varphi(a)$ обозначает функцию Эйлера от a, а $T(z)$ — число делителей z. Так как

$$T(z) \leqslant c_4(\varepsilon, p)\, z^{\frac{\varepsilon}{p-1}},$$

то

$$\left(\sum_{h=1}^{z}(h, z)\right)^{p-1} \leqslant c_5(\varepsilon, p)\, z^{\varepsilon} z^{p-1},$$

$$A \leqslant \frac{y_0}{y}\, p!\left(2\frac{x^{1/p}}{z}\right)^{p-1} c_5(\varepsilon, p)\, z^{\varepsilon} z^{p-1} \leqslant c_6(\varepsilon, p)\frac{x^{\frac{p-1}{p}}}{y}\, y^{\varepsilon}.$$

Тем самым лемма 2 доказана.

3. Оценка суммы

$$\sum_{n=1}^{[x^{1/p}]} e^{2\pi i n^p \frac{a}{x}}, \quad a < x.$$

Всегда возможно[8]) найти такую дробь $\frac{q}{y}$ (со взаимно простыми q и y), чтобы разность $\frac{a}{x} - \frac{q}{y} = \frac{a'}{xy}$ удовлетворяла следующим условиям:

$$|a'| < \frac{x^{1/p}}{2p!} = c, \quad 0 < y \leqslant 2p!\, x^{\frac{p-1}{p}} = b. \tag{128}$$

Для каждого $a < x$ справедливы доказываемые ниже оценки (134) и (142); (134) используются для малых y, (142) — для больших y. Во всем дальнейшем мы предполагаем p фиксированным и > 1. (Для $p = 1$ теорема 8 тривиальна.)

Первая оценка.

1. Пусть $a' > 0$. Разобьем сумму

$$\Sigma_a = \sum_{0 < n \leqslant x^{1/p}} e^{2\pi i n^p \frac{a}{x}}$$

на части Σ_ρ:

$$\Sigma_a = \sum_{\rho=0}^{y-1} \Sigma_\rho,$$

где

$$\Sigma_\rho = \sum_{0 \leqslant u' \leqslant \frac{x^{1/p}-\rho}{y}} e^{2\pi i \frac{a}{x}(\rho + u'y)^p} \tag{129}$$

(причем для $\rho = 0$ член с $u' = 0$ опускается). Имеем

$$\Sigma_\rho = \sum_{0 \leqslant u' \leqslant \frac{x^{1/p}-\rho}{y}} e^{2\pi i\left(\frac{q}{y} + \frac{a'}{xy}\right)(\rho + u'y)^p} = e^{2\pi i\left(\frac{q}{y} + \frac{a'}{xy}\right)\rho^p}\, \Sigma'_\rho,$$

где

$$\Sigma'_\rho = \sum_{0 \leqslant u' \leqslant \frac{x^{1/p}-\rho}{y}} e^{g(u') i}, \quad g(u') = \frac{(\rho + u'y)^p - \rho^p}{y}\,\frac{2\pi a'}{x}. \tag{130}$$

---

[8]) См., например, Landau, Zahlentheorie, т. 1, стр. 100.

Далее, так как $a' > 0$, то, в силу (128), для u', входящего в Σ_ρ, имеем:

$$g'(u') = 2\pi \frac{a'}{x} y^{p-1} \left(u' + \frac{\rho}{y}\right)^{p-1} p < 2\pi p \frac{a'}{x} x^{\frac{p-1}{p}} < \pi. \tag{131}$$

Разложим Σ'_ρ на две части:

$$\Sigma_{1\rho} = \sum_{u'=0}^{\left[\frac{\left(\frac{x}{a'}\right)^{1/p} - \rho}{y}\right]} e^{g(u')i} \quad \text{и} \quad \Sigma_{2\rho} = \sum_{u' = \left[\frac{\left(\frac{x}{a'}\right)^{1/p} - \rho}{y}\right] + 1}^{\left[\frac{x^{1/p} - \rho}{y}\right]} e^{g(u')i}. \tag{132}$$

Первая сумма $\Sigma_{1\rho}$ по абсолютной величине

$$\leqslant \frac{x^{1/p}}{ya'^{1/p}} + 1.$$

Для всех значений u', входящих во вторую сумму, имеет место неравенство

$$g'(u') = \frac{a'}{x} \cdot 2p\pi \cdot (u'y + \rho)^{p-1} > 2p\pi \left(\frac{a'}{x}\right)^{1/p} = \theta > 0, \tag{133}$$

и так как, в силу (131) и неравенства $g''(u') > 0$, предположения неравенства ван-дер-Корпута выполнены, получаем, согласно (122),

$$|\Sigma_{2\rho}| < \frac{4\pi}{2p\pi} \left(\frac{x}{a'}\right)^{1/p}, \tag{133a}$$

т. е.

$$|\Sigma_\rho| \leqslant |\Sigma_{1\rho}| + |\Sigma_{2\rho}| \leqslant \frac{3x^{1/p}}{a'^{1/p}}.$$

Отсюда следует, что

$$|\Sigma_a| < \sum_{\rho=0}^{y-1} |\Sigma_\rho| \leqslant \frac{3yx^{1/p}}{|a'|^{1/p}} = 3y \left(\frac{x}{|a'|}\right)^{1/p}. \tag{134}$$

2. Пусть $a' < 0$. Если мы заменим во всем предшествующем a' на $|a'|$, то для комплексно сопряженного с $\Sigma_{2\rho}$ числа $\overline{\Sigma}_{2\rho} = \sum e^{-g(u')i}$ будет выполнено предположение неравенства (122) (с $\theta = 2p\pi \left(\frac{|a'|}{x}\right)^{1/p}$), так что (133a) будет иметь место с заменой a' на $|a'|$, и значит (134) останется в силе.

Вторая оценка.

На основании неравенства Вейля (123)

$$\left| \sum_{0 < n \leqslant x^{1/p}} e^{2\pi i \frac{a}{x} n^p} \right|^{2^{p-1}} <$$

$$< 4^{2^{p-1}} \left(x^{\frac{2^{p-1}-1}{p}} + x^{\frac{2^{p-1}}{p} - 1} \sum_{0 < h_i \leqslant [x^{1/p}]} \frac{1}{\left\{p!\, h_1 \ldots h_{p-1} \frac{a}{x}\right\}} \right). \tag{135}$$

Имеем

$$\frac{1}{\left\{p!\,h_1\ldots h_{p-1}\frac{a}{x}\right\}}=\frac{1}{\left\{p!\,h_1\ldots h_{p-1}\frac{q}{y}+p!\,\frac{h_1\ldots h_{p-1}a'}{xy}\right\}}=$$

$$=\frac{1}{\left\{p!\,h_1\ldots h_{p-1}\frac{q}{y}+\frac{\theta}{y}\right\}}\leqslant\frac{2}{\left\{p!\,h_1\ldots h_{p-1}\frac{q}{y}\right\}}, \tag{136}$$

так как, в силу (128), $|\theta|<\frac{1}{2}$. (Это неравенство имеет место также для $y\,|\,p!\,h_1\ldots h_{p-1}$.)

Значит, достаточно исследовать сумму

$$\Sigma=\sum_{0<h_i\leqslant[x^{1/p}]}\frac{1}{\left\{p!\,h_1\ldots h_{p-1}\frac{q}{y}\right\}}. \tag{137}$$

В случае, когда произведение $p!\,h_1\ldots h_{p-1}$ делится на y, соответствующий член суммы (137) равен $[x^{1/p}]$. Число произведений $p!\,h_1\ldots h_{p-1}$, делящихся на y, по лемме 2 не превосходит

$$c(\varepsilon)\frac{x^{\frac{p-1}{p}}}{y}\,y^{\varepsilon},\quad\text{следовательно,}\quad\leqslant c\,\frac{x^{\frac{p-1}{p}}}{y^{1-\frac{1}{2p}}}\ ^{9)}.$$

Сумма всех членов, соответствующих этим произведениям, не превосходит

$$\frac{cx}{y^{1-\frac{1}{2p}}}. \tag{138}$$

Рассмотрим теперь случай, когда произведение $p!\,h_1\ldots h_{p-1}$ не делится на y.

Вычетами по модулю y каждой последовательности чисел вида

$$q(u+1),\quad q(u+2),\quad\ldots,\quad q(u+y),$$

где $(q,\,y)=1$, служат, с точностью до порядка следования, все целые числа от нуля до $y-1$.

Соответствующие значения $\frac{1}{\alpha_t}$, где α_t — расстояние от $q\,\frac{u+t}{y}$ до ближайшего целого числа, $1\leqslant t\leqslant y$ и $t\not\equiv -u \pmod y$, суть, с точностью до порядка следования,

$$y,\ \frac{y}{2},\ \frac{y}{3},\ \ldots,\ \frac{y}{\left[\frac{y}{2}\right]},\ \ldots,\ \frac{y}{3},\ \frac{y}{2},\ y,$$

причем член $\frac{y}{\left[\frac{y}{2}\right]}$ встречается один раз или дважды, смотря по тому, будет ли y четным или нечетным. Сумма этих значений при $y>1$ не превосходит $4y\ln y$. Из (136) следует, что сумма различных среди соответствующих значений в (137) не превышает

$$4y\ln y. \tag{139}$$

---

[9] $c(\varepsilon)$ и c зависят от p; но p фиксировано

С другой стороны, для каждого $\varepsilon' > 0$ среди произведений $p!\,h_1 \ldots h_{p-1}$, не превосходящих $p!x^{\frac{p-1}{p}}$, где $x \geqslant x_0(\varepsilon')$, каждое число может встречаться не более $x^{\varepsilon'}$ раз, так как уравнение $p!\,h_1 \ldots h_{p-1} = m \leqslant p!x$ имеет не более $T^{p-1}(m) = o(x^{\varepsilon'})$ решений $h_1 \ldots h_{p-1}$, где $T(m)$ — число делителей числа m.

Сумма выражений $\dfrac{1}{\left\{p!\,h_1 \ldots h_{p-1} \dfrac{a}{x}\right\}}$, распространенная на все произведения $p!\,h_1 \ldots h_{p-1}$, не делящиеся на y, в силу (128), не превышает

$$y \ln y \cdot x^{\varepsilon''/2} < p!\, x^{\frac{p-1}{p} + \varepsilon''}, \tag{140}$$

где ε'' — произвольно малое и $x \geqslant x_1(\varepsilon'')$. Выберем $\varepsilon'' = \dfrac{1}{2p}$. Тогда, в силу (138) и (140),

$$\sum_{0 < h_i \leqslant [x^{1/p}]} \frac{1}{\left\{p!\,h_1 \ldots h_{p-1} \dfrac{a}{x}\right\}} < c\left(x^{1-\frac{1}{2p}} + \frac{x}{y^{1-\frac{1}{2p}}}\right). \tag{141}$$

Отсюда, в силу (135), получаем:

$$|\Sigma_a|^{2^{p-1}} = \left|\sum_{0 < n \leqslant x^{1/p}} e^{2\pi i \frac{a}{x} n^p}\right|^{2^{p-1}} <$$

$$< 4^{2^{p-1}} c\left[x^{\frac{2^{p-1}-1}{p}} + x^{\frac{2^{p-1}}{p}-1}\left(\frac{x}{y^{1-\frac{1}{2p}}} + x^{1-\frac{1}{2p}}\right)\right] < c'\left(x^{\frac{2^{p-1}}{p}-\frac{1}{2p}} + \frac{x^{\frac{2^{p-1}}{p}}}{y^{1-\frac{1}{2p}}}\right). \tag{142}$$

4. Оценка суммы

$$\sum_{a=0}^{x-1} \left|\sum_{0 < n \leqslant x^{1/p}} e^{2\pi i n^p \frac{a}{x}}\right|^u.$$

Заменяем в $\Sigma_a = \sum\limits_{0 < n \leqslant x^{1/p}} e^{2\pi i n^p \frac{a}{x}}$ число $\dfrac{a}{x}$ по (128) на $\dfrac{q}{y} + \dfrac{a'}{xy}$ и пишем $\Sigma_a = (a', y)$, не принимая при этом во внимание зависимость (a', y) от q, так как мы получили в (134) и (142) оценку Σ_a сверху, не зависящую от q. Одна и та же пара a', y может относиться посредством (128) различным a с $0 \leqslant a < x$, однако для каждого отдельного y — самое большее y различным a. Действительно, пусть числу $a = a_0$ отнесена пара a', y и пусть a_i — различные $a > a_0$ (расположенные в возрастающем порядке), к которым также отнесена пара a', y. Тогда $a_i y - q_i x = a'$ $(i = 0, 1, \ldots)$. В равенствах $(a_i - a_j)\, y = (q_i - q_j)\, x$ при $i > j$ имеем $q_i > q_j$, так как $y > 0$ и $a_i > a_j$; значит, $q_i - q_0 \geqslant i$ и, следовательно, $a_i - a_0 \geqslant \dfrac{ix}{y}$. Но для $0 < a_i < x$ это возможно лишь в том случае, когда $i < y$, чем наше утверждение и доказано. Мы имеем, таким образом, в силу (128)[10],

$$\sum_{a=0}^{x-1} |\Sigma_a|^u \leqslant \sum_{y=1}^{[b]} y \sum_{a'=[-c]+1}^{[c]} |(a', y)|^u. \tag{143}$$

---

[10]) b, c определены в (128).

1. Если $y > x^{\frac{1}{2p-1}}$, то вследствие (142) будет

$$|(a', y)| < 2c'x^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p2^p}}.$$

Таким образом, если u выбрано бóльшим $p2^p$, то имеет место неравенство

$$|(a', y)| < K_2(u, p)\,\frac{x^{u/p}}{x^2}. \tag{143a}$$

2. Для $y \leqslant x^{\frac{1}{2p-1}}$, в силу (142) и (134), имеем

$$|(a', y)| \leqslant \min\left(\frac{2c'x^{1/p}}{y^{\frac{1-\frac{1}{2p}}{2^{p-1}}}}, \frac{3x^{1/p}y}{|a'|^{1/p}}\right). \tag{144}$$

Разобьем сумму

$$y\sum_{a'=[-c]+1}^{[c]}|(a', y)|^u \tag{145}$$

на две части, соответственно неравенствам

$$1.\ |a'| \leqslant \frac{1}{c'p}\,y^{p+\frac{2p-1}{2^p}}, \qquad 2.\ |a'| > \frac{1}{c'p}\,y^{p+\frac{2p-1}{2^p}}.$$

Из (144) следует, что в первой части суммы (145)

$$|(a', y)| \leqslant \frac{2c'x^{1/p}}{y^{\frac{1-\frac{1}{2p}}{2^{p-1}}}},$$

а во второй части

$$|(a', y)| \leqslant \frac{3x^{1/p}\,y}{|a'|^{1/p}}. \tag{146}$$

Таким образом сумма членов, принадлежащих первой части суммы (145), не превосходит

$$4y\,\frac{(2c'x^{1/p})^u}{y^{\frac{2p-1}{2^p p}u}}\,\frac{y^{p+\frac{2p-1}{2^p}}}{c'p}. \tag{146a}$$

Следовательно, если выбрать $u \geqslant \left(p+\frac{2p-1}{2^p}+3\right)\frac{p2^p}{2p-1}$, например $u \geqslant 3p2^p$ $(p > 1)$, эта сумма будет

$$\leqslant 4\,\frac{(2x^{1/p})^u\,c'^{u-p}}{y^2}. \tag{147}$$

Сумма членов, принадлежащих второй части суммы (145), будет, в силу (146),

$$\leqslant x^{u/p}\sum_{a'=m}^{\infty}\frac{(3y)^{u+1}}{a'^{u/p}}$$

(где суммирование производится по всем значениям a' между $m = \left[\frac{1}{c'^p} y^{p+\frac{2p-1}{2^p}}\right] +$ $+1$ и $+\infty$). Имеем

$$x^{u/p} \sum_{a'=m}^{\infty} \frac{(3y)^{u+1}}{a'^{u/p}} < x^{u/p} \int_m^{\infty} \frac{(3y)^{u+1}}{a'^{u/p}} da' + \frac{(3y)^{u+1} c'^u x^{u/p}}{y^{\frac{u}{p}\left(p+\frac{2p-1}{2^p}\right)}} <$$

$$< \frac{K_1(u, p)\, x^{u/p}}{y^{u\frac{2p-1}{2^p p} - \left(p+\frac{2p-1}{2^p}+1\right)}} + \frac{(3y)^{u+1} c'^u x^{u/p}}{y^{\frac{u}{p}\left(p+\frac{2p-1}{2^p}\right)}}. \tag{147a}$$

Если u выбрано бо́льшим или равным $3p2^p$, то последнее выражение будет меньше чем

$$K_3(u, p) \frac{x^{u/p}}{y^2} \tag{147b}$$

(где $K_3(u, p)$ обозначает величину, зависящую только от u и p).

Таким образом для $u \geqslant 3p2^p$ мы имеем, в силу (143a), (147) и (147b), неравенство

$$\sum_{y=1}^{[b]} y \sum_{a'=[-c]+1}^{[c]} |(a', y)|^u < K_4(u, p)\, x^{u/p} \sum_{y=1}^{\infty} \frac{1}{y^2} +$$

$$+ \frac{x^{u/p}}{x^2} K_2(u, p)\, x^{2\frac{p-1}{p}+\frac{1}{p}} < K(u, p)\, x^{u/p}. \tag{148a}$$

Тем самым мы получим для суммы (143) оценку

$$\sum_{a=0}^{x-1} \left| \sum_{0<n\leqslant x^{1/p}} e^{2\pi i \frac{a}{x} n^p} \right|^u < K(u, p)\, x^{u/p}. \tag{148}$$

Доказательство теоремы. Так как число $N(x)$ членов последовательности степеней $1^p, 2^p, \ldots,$ не превосходящих число x, дается выражением $[x^{1/p}]$, то, в силу (148), мы можем написать:

$$\sum_{a=0}^{x-1} \left| \sum_{0<n\leqslant x^{1/p}} e^{2\pi i \frac{a}{x} n^p} \right|^{2u} < \overline{K}(u, p)\left(N\left(\frac{x}{u}\right)\right)^{2u}, \tag{149}$$

т. е. условие (120) замечания к теореме 7 выполнено.

Тем самым обобщенная теорема Варинга полностью доказана.