Л. А. Люстерник, Л. Г. Шнирельман, Топологические методы в вариационных задачах и их приложения к дифференциальной геометрии поверхностей, *УМН*, 1947, том 2, выпуск 1, 166–217

# ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ПОВЕРХНОСТИ

Л. Люстерник и Л. Шнирельман

Настоящая статья содержит изложение развитых авторами в своё время топологических методов качественного анализа вариационных задач и их применения к геометрии. Имеется в виду, прежде всего, решение так называемой проблемы Пуанкаре о существовании трёх замкнутых геодезических на поверхности рода ноль. (Точная формулировка теоремы о трёх геодезических дана на стр. 203.)

Впервые изложение этих методов (если не считать нескольких заметок в Comptes Rendus и Monatsheft f. Math. u. Physik) было дано в отдельном выпуске Трудов Института математики и механики МГУ, вышедшем в 1930 г. под названием «Топологические методы в вариационных задачах».

Кроме того, французская редакция первой части этого выпуска вышла в 1934 г. в серии Actualités под редакцией Жака Адамара.

Как показал опыт, чтение упомянутой работы вызывало затруднение, так как ряд мест, особенно в основной части, был изложен слишком сжато. В связи с этим настоящее изложение является более подробным всюду, где это оказалось необходимым.

Статья состоит из двух частей. Первая посвящена топологической теории экстремумов функции, заданных на многообразии. Она имеет самостоятельный интерес и послужила исходным пунктом работ некоторых советских и иностранных математиков. Впрочем, мы этих работ касаемся здесь лишь постольку, поскольку это полезно для лучшего понимания излагаемого материала.

Наряду с этим, первая часть является существенной для перехода к вариационным задачам в собственном смысле. Этим задачам посвящена вторая часть работы. Конкретно исследуется только одна задача — о замкнутых экстремалях на поверхностях рода ноль. Но методы её получали применения к другим вариационным задачам.

В эту часть введены, сравнительно с прежним изложением, некоторые добавления (например, дополнительные параграфы, где со всей полнотой описываются важные для дальнейшего свойства семейств окружностей на сфере). Такое более подробное изложение несколько увеличивает объём части и могло утяжелить доказательство основной теоремы. Поэтому при переходе к непосредственному её доказательству (стр. 191) даются методические указания, которые могут облегчить читателю ознакомление с этим доказательством. Именно, проводится расщепление теоремы на ослабленную теорему, доказываемую в основном топологически, и на уточнение, доказываемое аналитически.

## Обозначения

$a \in M$ — точка $a$ принадлежит множеству $M$.

$M \subset N$ — множество $M$ является частью множества $N$.

$M \cap N$ — общая часть множеств $M$ и $N$.

$\rho(a, b)$ — расстояние между точками $a$ и $b$.

$\rho_L(p, q)$ — расстояние между кривыми $p$ и $q$ в метрике Фреше.

$\dim M$ — размерность множества $M$.

$(f = c)$ — множество точек $P$, для которых $f(P) = c$.

$(f < c)$ — множество точек $P$, для которых $f(P) < c$.

$(f > c)$ — множество точек $P$, для которых $f(P) > c$.

$df(B, dx_i)$ — полный дифференциал функции $f(P)$ в точке $P = B$ при приращениях $dx_i$.

$M \cdot N$ — топологическое произведение множеств $M$ и $N$.

$z_1 \underset{R_n}{\times} z_2$ — пересечение циклов $z_1$ и $z_2$ в многообразии $R_n$.

$\chi_{R_n}(z_1, z_2)$ — индекс пересечения циклов $z_1$ и $z_2$ в многообразии $R_n$.

$h$ — положительное число, зависящее от многообразия $R_n$ такое, что всякая геодезическая дуга длины, меньше $h$, есть дуга наименьшей длины среди всех дуг многообразия $R_n$, соединяющих её концы.

$\overline{ab}$ — геодезическая дуга или отрезок, соединяющий точки $a$ и $b$.

$\overset{\smile}{ab}$, $\underset{\frown}{ab}$ — дуги замкнутой кривой $p$, разбитой точками $a$ и $b$ на две части.

# ЧАСТЬ I

## $n$-мерный случай

### §1. Критические точки

Будем рассматривать сейчас функцию $f$, заданную на $n$-мерном многообразии $R_n$. Точка $A$ многообразия называется критической для функции $f$, если полный дифференциал этой функции в этой точке тождественно равен нулю. Для простоты сначала рассмотрим случай, когда $f$ задана в $n$-мерном эвклидовом пространстве с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n : f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Критическая точка $A$ определяется системой условий:

$$\frac{\partial f(A)}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Все некритические точки будем называть обыкновенными. В обыкновенной точке $B$ функции $f$, для которой $f(B) = c$ и не все $\frac{\partial f(B)}{\partial x_i} = 0$, можно провести нормаль к поверхности уровня $(f = c)$, угловые коэффициенты которой пропорциональны $\frac{\partial f(B)}{\partial x_i}$.

Если
$$dx_i = \frac{\partial f(B)}{\partial x_i} dt, \tag{1}$$

то

$$df = df(B, dx_i) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial f(B)}{\partial x_i}\right]^2 dt = \sum_{i=1}^{n} [\operatorname{grad} f(B)]^2 dt. \tag{2}$$

Знак $df(B, dx_i)$ совпадает со знаком $dt$, и при $dt < 0$, $df < 0$, т. е. направление нормали $dx_i = \frac{\partial f(B)}{\partial x_i} dt$ при $dt < 0$ есть направление убывания функции $f$, направление в сторону области $(f < c)$. Вследствие непрерывности частных производных $f$ достаточно малый отрезок $BB_1$ нормали к $(f = c)$ в точке $B$, взятый в сторону $(f < c)$ (рис. 1), целиком, кроме точки $B$, лежит в области $(f < c)$. Больше того, можно найти такую малую окрестность $U_B$ точки $B$ на $(f=c)$ и такую положительную константу $\eta_B$, что все отрезки $CC_1$ нормали к $(f = c)$, восстановленные в точках $C$ области $U_B$ в сторону $(f < c)$ длины $\eta_B$, лежат целиком (кроме их начальных точек $C$) в области $(f < c)$.

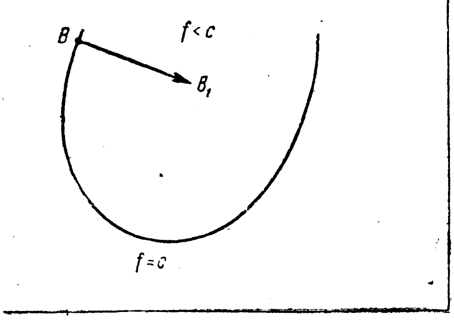

Рис. 1.

Пусть теперь на $(f = c)$ задано замкнутое множество $M$ обыкновенных точек. Определяя для каждой точки $B$ из $M$ соответственные окрестность $U_B$ и константу $\eta_B$, мы в силу теоремы Heine-Borel'я можем выделить конечное число таких окрестностей $U_{B_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, покрывающих $M$. Обозначим через $\eta$ положительное число — наименьшее из чисел $\eta_{B_i}$. Можно провести в каждой точке $C$ множества $M$ отрезок нормали $CC_1$ в сторону $(f < c)$ длины $\eta$, причём все нормали $CC_1$ (кроме их начальных точек $C$) лежат в $(f < c)$.

Мы доказали следующее предложение:

Для всякого замкнутого множества $M$ обыкновенных точек, лежащего на $(f = c)$, можно найти такое положительное число $\eta = \eta(M, f)$, зависящее только от $M$ и $f$, что отрезок нормали $CC_1$ длины $\eta$, восстановленной в любой точке $C$ множества $M$ в сторону $(f < c)$, лежит целиком, кроме точки $C$, в области $(f < c)$.

Перейдём к функциям, заданным на $n$-мерных многообразиях $R_n$. Мы во всём дальнейшем будем предполагать следующее:

1) $R_n$ есть конечное триангулируемое многообразие, т. е. $R_n$ допускает конечное симплициальное разбиение, и всякая внутренняя точка $R_n$ имеет окрестность, гомеоморфную $n$-мерному шару, т. е. в достаточно малой окрестности всякой внутренней точки $R_n$ можно ввести местную систему координат $(x_i) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

2) $R_n$ есть трижды дифференцируемое $n$-мерное многообразие, т. е. существует семейство систем местных координат $(x_i^B)$ в окрестностях $U_B$ всех внутренних точек $B$ многообразия $R_n$, удовлетворяющее следующему условию:

Если $(x_i^A)$ и $(x_i^B)$ — системы местных координат, определённые в окрестностях $U_A$ и $U_B$ точек $A$ и $B$ из $R_n$, и если $U_A$ и $U_B$ пересекаются, то в их общей части $U_A \cap U_B$ все координаты $x_i^A$ суть трижды дифференцируемые функции всех $x_i^B$ и обратно.

Будем эти системы местных координат называть допустимыми.

Пусть $(x_i^B)$ — допустимая система координат в окрестности $U_B$ точки $B$, $(\overline{x}_i^B)$ — другая система в $U_B$, где все $\overline{x}_i^B$ в $U_B$ трижды дифференцируемы по всем $x_i^B$ и обратно. Можно заменить в $U_B$ систему координат $(x_i^B)$ системой $(\overline{x}_i^B)$, и тогда система $\overline{x}_i^B$ будет, очевидно, допустимой системой.

3) На $R_n$ задана риманова метрика

$$ds^2 = \sum g_{ik}\, dx_i \cdot dx_k,$$

где все $g_{ik}$ в выбранной допустимой системе координат суть трижды дифференцируемые функции.

Если функция $f$ имеет в точке $B$ непрерывные частные производные первых двух порядков относительно координат местной допустимой системы $(x_i^B)$, то она имеет такие же производные относительно координат $(\overline{x}_i^B)$ любой другой допустимой системы в $U_B$. Будем говорить: $f$ дважды непрерывно дифференцируема в точке $B$. Если $f$ дважды непрерывно дифференцируема в каждой внутренней точке $R_n$, говорят: $f$ дважды непрерывно дифференцируема в $R_n$.

При переходе от одной допустимой системы координат к другой первые частные производные изменяются линейно.

Если все частные производные $\frac{\partial f(B)}{\partial x_i} = 0$, то и все $\frac{\partial f(B)}{\partial \overline{x}_i} = 0$. Таким образом тождественное равенство нулю полного дифференциала $df$ в точке $B$ не зависит от выбора допустимой системы местных координат. И определение критической точки как точки, в которой $df = 0$, и определение обыкновенной точки (в которой не все частные производные равны нулю) не зависят от выбора местной допустимой системы координат.

В окрестности $U_B$ каждой точки $B$ можно выбрать местную эвклидову систему координат $(x_i)$, в которой квадрат элемента дуги выразится:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} dx_i^2.$$

Если $x_i$ — локально эвклидова система координат в $U_A$, $f(A) = c$, то формулы (1) определяют нормальное направление к $(f = c)$ в точке $A$, и при $dt < 0$, в силу (2), это есть нормальное направление в сторону $(f < c)$. Будем называть геодезической нормалью к $(f = c)$ в сторону $(f < c)$ отрезок геодезической, направленный из $A$ в нормальном направлении в сторону $(f < c)$. Повторяя все предыдущие рассуждения, обобщим формулированное выше предложение в виде:

Лемма. *Пусть $f$ — дважды дифференцируемая функция в $R_n$, а $M$ — замкнутое множество обыкновенных точек на $(f = c)$. Существует положительное число $\eta = \eta\,(M, f)$, такое, что отрезок геодезической нормали $BB_1$, длины $\eta$, восстановленный из каждой точки $B$ множества $M$, лежит целиком (кроме своего начала $B$) в $(f < c)$.*

## § 2. Гомотопические классы

Назовём замкнутое множество $A$, расположенное в абстрактном компактном пространстве $R$, образом замкнутого множества $M$, если каждой точке множества $M$ отвечает точка множества $A$, и это соответствие однозначно и непрерывно в направлении от $M$ к $A$ (но оно не должно быть, вообще говоря, взаимно однозначным).

Назовём гомотопическим классом замкнутых множеств в компактном пространстве совокупность замкнутых множеств, обладающую следующим свойством: если она содержит множество $A$, то она содержит также и все те множества, которые могут быть получены из $A$ при помощи деформаций. Пример: совокупность всех замкнутых линий на сфере, могущих самопересекаться или даже заполнять некоторую часть сферы наподобие кривой Peano, является гомотопическим классом образов круга на сфере.

На торе мы можем образовать бесконечное множество различных классов образов круга, именно: можно взять два круга, негомологичных между собой, и каждый из них деформировать, сохраняя образ первоначального круга. Мы получим два различных класса, потому что ни один из кругов не может быть деформирован во второй, ему негомологичный.

Назовём замкнутым гомотопическим классом такой гомотопический класс, который содержит все топологические пределы последовательностей принадлежащих ему множеств.

## § 3. Принцип стационарной точки

Пусть $R_n$ есть замкнутое $n$-мерное многообразие с римановой метрикой. Пусть на нём определена произвольная функция $f$, непрерывная так же, как и её производные до второго порядка.

Обозначим через $(f=c)$ множество точек в $R_n$, определённое уравнением $f=c$, через $(f<c)$ — совокупность точек, где $f<c$, через $(f>c)$ — совокупность точек, где $f>c$, и через $(df=0)$ — совокупность точек, где $df=0$. Пусть $[A]$ есть замкнутый гомотопический класс множеств $A$ в $R_n$.

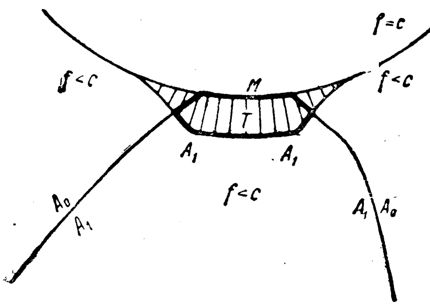

Рис. 2.

Функция $f$ достигает своего максимума $c(A)$ на каждом из замкнутых множеств $A$ класса $[A]$. Обозначим через $c$ нижнюю грань этих максимумов. Эта грань достигается по крайней мере на одном множестве $A_0$ класса $[A]$. Назовём такое множество $A_0$ минимальным и значение $c$ — критическим значением, отвечающим данному классу множеств. Невозможно преобразовать при помощи деформации никакое множество класса $[A]$ во множество, лежащее в области $(f<c)$, по определению числа $c$.

Теорема. *Пусть $A_0$ есть минимальное множество и $c$ — соответственное критическое значение. Если $M=A_0 \cap (f=c)$, пересечение множества $A_0$ с гиперповерхностью $(f=c)$, заключено внутри многообразия $R_i$, то $M$ содержит по крайней мере одну стационарную точку гиперповерхности $(f=c)$* (т. е. такую точку, где $df \equiv 0$).

Доказательство (рис. 2). Пусть на $M$ $df$ всюду отлично от 0. При достаточно малом $\varepsilon$ на замкнутой сфере $S(M, \varepsilon)$ радиуса $\varepsilon$, описанной на $(f=c)$ вокруг множества $M$, имеем: $df \neq 0$. Следовательно, в силу леммы § 1, можно из каждой точки $\gamma \in S(M, \varepsilon)$ восставить геодезическую нормаль $\gamma\gamma_1$ некоторой длины $\delta > 0$ к гиперповерхности $(f = c)$ в сторону $(f < c)$, причём каждая нормаль $\gamma\gamma_1$ лежит целиком, кроме точки $\gamma$, в $(f < c)$. Совокупность нормалей $\gamma\gamma_1$ заполняет некоторый цилиндрический слой $T$. Произведём теперь следующую деформацию: каждую нормаль $\gamma\gamma_1$, восставленную в точке $\gamma \in M$, мы сведём к её концу $\gamma_1$. Каждую нормаль $\gamma'\gamma_1'$, восставленную в точке $\gamma' \in S(M, \varepsilon)$, удалённой от $M$ на расстояние $\rho$, $(0 < \rho \leqslant \varepsilon)$, мы сведём к её отрезку $\gamma_2'\gamma_1'$ длины $\delta \frac{\rho}{\varepsilon}$. (Нормали, образующие боковую поверхность цилиндра, остаются неизменными (рис. 2).) Получаем деформацию $T$. Вместе с тем деформируется и заключённая в $T$ часть $A_0$, причём на границе (и вне) $T$ деформация равна 0.

Нетрудно видеть, что при помощи описанного преобразования множество $A_0$ переходит в $A_1$, лежащее внутри $(f < c)$, но множество $A_1$ принадлежит классу $[A]$. Это противоречит определению числа $c$.

Принцип стационарной точки является обобщением принципа минимума и максимума. Для получения принципа минимума достаточно в качестве гомотопического класса $[A]$ рассмотреть совокупность всех индивидуальных точек; принцип максимума получается, если мы класс $A$ будем считать состоящим только из одного множества — самого $R_n$ (если $R_n$ имеет границы, то будем допускать лишь такие деформации, которые оставляют неизменными границы $R_n$. Такие деформации переводят $R_n$ в самоё себя).

Пусть на многообразии $R_n$ даны два несводимых друг в друга путём деформации континуума $A$ и $A_1$. Обозначим через $[A]$ и $[A_1]$ гомотопические классы, состоящие из результатов всевозможных деформаций $A$ и $A_1$. По принципу стационарной точки этим классам отвечают две особые точки. Таким образом число несводимых друг к другу континуумов должно было бы давать минимальное число стационарных точек для произвольной функции. Однако в некоторых случаях критические значения, отвечающие различным гомопотическим классам, совпадают, и при этом стационарные точки могут сливаться.

Пусть для некоторой функции совпадут два критических значения — её минимум и максимум — функция $f$ обращается в постоянную, во всех точках многообразия её градиент исчезает, и появляется континуум стационарных точек. Итак, некоторые критические значения функции являются, так сказать, существенно различными — их совпадение влечёт за собой существование континуума решений уравнения $df = 0$.

Нашей ближайшей задачей является отыскание таких критических значений. Они будут определены в следующих параграфах; их число определяется при помощи некоторого топологического инварианта, который будем называть «категория».

## § 4. Категория замкнутого множества относительно компактного пространства

Определение. *Замкнутое множество $A$, расположенное в пространстве $R$, будем называть множеством первой категории относительно этого пространства, если оно может быть сведено к точке при помощи деформации внутри $R$.*

Замкнутое множество будем называть категории $k$ относительно $R$, если оно может быть разбито на $k$ замкнутых частей (могущих пересекаться), каждая из которых первой категории относительно $R$. Будем писать: $\operatorname{cat}_R A = k$.

В частности, можно рассматривать категорию пространства $R$ относительно самоё себя. Это есть минимальное число частей, сводимых к точке, на которые можно разбить $R$.

Примеры. Внутренность круга первой категории относительно любого содержащего его пространства, в частности относительно себя самой. Сферическое многообразие произвольного числа измерений второй категории относительно себя самого. В самом деле, сферическое многообразие само на себе несводимо к точке, как это ясно интуитивно и как это строго можно доказать. Но если разбить его на 2 части, то каждая из них сводима к точке. Тор двух измерений третьей категории относительно себя самого. Проективное пространство $n$ измерений категории $n+1$ относительно себя самого, как будет показано дальше.

Основные свойства категорий.

1. Если $A \supset B$, то $\operatorname{cat}_R A \geqslant \operatorname{cat}_R B$.

2. $\operatorname{cat}_R (A+B) \leqslant \operatorname{cat}_R A + \operatorname{cat}_R B$.

3. Пусть $B$ — результат деформации $D(A, B)$ множества $A$ внутри $R$. Мы имеем $\operatorname{cat}_R B \geqslant \operatorname{cat}_R A$.

В самом деле, пусть $B$ есть множество первой категории, т. е. существует деформация $D_1(B, b)$, переводящая $B$ в точку $b$.

Следовательно, существует деформация $D_2(A, b) = D(A, B) D_1(B, b)$, которая переводит $A$ в точку $b$, т. е. $\operatorname{cat}_R A = 1$.

Пусть $\operatorname{cat}_R B = k$; по определению:

$$B = B_1 + B_2 + \ldots + B_k; \quad \operatorname{cat}_R B_i = 1, \ i = 1, 2, \ldots, k.$$

Обозначим через $A_1, A_2, \ldots, A_k$ наибольшие части $A$, которые преобразуются в $B_1, B_2, \ldots, B_k$ при помощи деформации $D(A, B)$; мы имеем

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_k$$

по только что доказанному для всех $A_i$ $\operatorname{cat}_R A_i = 1$.

Следовательно, $\operatorname{cat}_R A \leqslant k$.

4. Теорема. *При достаточно малом* $\varepsilon$

$$\operatorname{cat}_R A = \operatorname{cat}_R S(A, \varepsilon).$$

Доказательство. Выберем $h$ так, что всякая геодезическая дуга на $R$ длины $h$ есть дуга минимальной длины среди всех дуг, соединяющих её концы. Мы разобьём $R$ на такие симплексы диаметра $< h$ (будем их называть правильными симплексами), у которых одномерные грани суть геодезические дуги минимального типа, а $k$-мерные грани представляют собой пучок геодезических, соединяющих одну из вершин этой грани с противоположной $k-1$-мерной гранью.

Мы сейчас докажем, что всякое замкнутое множество категории 1 относительно $R$ заключено строго внутри правильного комплекса той же категории.

Итак, пусть существует деформация $\vartheta(A, a)$, которая сводит $A$ к точке $a$. Выберем положительное число $\eta \leqslant \frac{h}{3}$ таким образом, что две точки $A$, удалённые друг от друга на расстояние $\leqslant \eta$, во время деформации $\vartheta(A, a)$ удаляются друг от друга на расстояние, не превышающее $\frac{h}{3}$.

Произведём разбиение $R$ на правильные симплексы диаметра меньше $\frac{h}{6}$. Образуем из всех симплексов этого разбиения, вершины которых удалены от $A$ на расстояние, не превышающее $\frac{h}{3}$, некоторый комплекс $K_n$. $A$ заключено строго внутри $K_n$.

Докажем, что $\operatorname{cat}_R K_n = 1$.

Обозначим через $K_0$ совокупность вершин $K_n$, вообще через $K_i$ — совокупность его $i$-мерных граней.

Построим последовательно деформации $D(K_0, a)$, $D(K_1, a)$, $D(K_2, a), \ldots$ $\ldots, D(K_n, a)$, сводящие соответственно $K_0, K_1, K_2, \ldots, K_n$ к точке $a$.

Всякая точка из $K_0$ (вершина $K_n$) или лежит на $A$ или удалена от $A$ на расстояние не больше $\eta/3$. Деформация $D(K_0, a)$ состоит из двух частей.

I. Каждая из точек $k \subset K_0$ движется по минимальной геодезической дуге до некоторой точки $k' \subset A$, удалённой от $k$ на расстояние, не превосходящее $\eta/3$ (такую точку всегда можно найти). $K_0$ перейдут в совокупность точек $K_0' \subset A$.

Соседние вершины $k$ и $k_1$ из $K$ удаляются друг от друга во время деформации на расстояние, не превосходящее $\frac{\eta}{6} + \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} < \eta$. Они перейдут в точки $k'$ и $k_1'$ совокупности $K_0'$ со взаимным расстоянием, меньшим $\eta$.

II. Производим деформацию $\vartheta(A, a)$ множества $A$. $K_0'$, изменяясь вместе с $A$, перейдёт в точку $a$. Точки $k'$ и $k_1'$ могут удалиться друг от друга во время этой деформации на расстояние, не большее $h$ (по определению $\eta$).

Итак, две соседние вершины $k$ и $k_1$ во время деформации $D(K_0, a)$ расходятся на расстояние, меньшее $h$. Их всегда можно соединить геодезической дугой длины $< h$.

Теперь можно определить деформацию $D(K_1, a)$. $K_1$ состоит из геодезических минимальных дуг, соединяющих соседние точки $K_0$. Будем предполагать, что для концов этих дуг деформация $D(K_1, a)$ совпадает с $D(K_0, a)$. Сами же геодезические дуги из $K_1$ для любого момента деформации переходят в минимальные геодезические дуги, соединяющие точки, в которые перешли их концы. Такое определение законно, так как концы дуг расходятся по предыдущему на расстояние, не большее $h$.

Принимая во внимание, что $K_i$ состоит из геодезических минимальных дуг с концами, лежащими на $K_{i-1}$, мы можем аналогичным путём определить $D(K_i, a)$, если известна деформация $D(K_{i-1}, a)$.

Последовательно определим деформации $D(K_2, a)$, $D(K_3, a)$ вплоть до $D(K_n, a)$.

Итак, $K_n$ (как и все $K_i$) сводимо к точке $a$, $\operatorname{cat}_R K_n = 1$.

Из построения $K_n$ следует

$$A \subset S\left(A, \frac{\eta}{6}\right) \subset K_n.$$

Следовательно,

$$\operatorname{cat}_R S\left(A, \frac{\eta}{6}\right) = 1.$$

Пусть теперь категория $A$ равна $l > 1$.

Имеем:

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_l;\ \operatorname{cat}_R A_i = 1;\ i = 1, \ , \ldots, l.$$

Можно выбрать по только что доказанному число $\varepsilon$ настолько малым, что

$$\operatorname{cat}_R S(A_i, \varepsilon) = 1;\ i = 1, 2, \ldots, l.$$

Так как

$$S(A, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{l} S(A_i, \varepsilon),$$

то

$$\operatorname{cat}_R S(A, \varepsilon) \leqslant l.$$

С другой стороны,

$$S(A, \varepsilon) \supset A;\ \operatorname{cat}_R S(A, \varepsilon) \geqslant \operatorname{cat}_R A = l,$$

следовательно,

$$\operatorname{cat}_R S(A, \varepsilon) = l.$$

5. Следствие. Пусть $A$ есть топологический предел последовательности $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ Пусть для бесконечного множества значений индексов $n$ $\operatorname{cat}_R A_n \geqslant l$.

В таком случае $\operatorname{cat}_R A \geqslant l$.

В самом деле, при достаточно малом $\varepsilon$

$$\operatorname{cat}_R A = \operatorname{cat}_R S(A, \varepsilon).$$

Далее почти все $A_n$ заключены внутри $S(A, \varepsilon)$. Следовательно, категория $S(A, \varepsilon)$ не меньше $l$. Вместе с тем

$$\operatorname{cat}_R A \geqslant l.$$

Свойства 3 и 5 показывают, что категория не понижается при деформации и при переходе к пределу.

6. Обозначим через $[A_i]$ совокупность всех замкнутых множеств в $R_n$, чьи категории не меньше $i$. Из предыдущего следует:

Все $[A_i]$ суть замкнутые гомотопические классы.

В следующем параграфе мы увидим, что эти классы обладают замечательным свойством: слияние отвечающих им критических значений влечёт за собой появление континуума стационарных точек.

7. Теорема. *Всякое замкнутое множество, лежащее в многообразии $R$ и категории $k$ относительно $R$, имеет размерность $\geqslant k-1$.*

Доказательство. В самом деле, пусть $K$ — замкнутое множество размерности $r$.

Докажем, что $\operatorname{cat}_R K \leqslant r+1$. Существует столь малое число $\varepsilon$, что всякое множество диаметра $\varepsilon$, лежащее в $R$, может быть сведено к точке внутри $R$, т. е. имеет категорию 1. Сумма конечного числа подобных множеств, попарно не пересекающихся, имеет тоже категорию 1. Согласно теореме Лебега (Lebesgue), всякое множество размерности $r$ допускает $(\varepsilon, r+1)$ покрытие, т. е. может быть покрыто конечным числом замкнутых множеств $K_1, K_2, \ldots, K_p$ диаметра $\leqslant \varepsilon$, пересечение любых $(r+2)$ из которых пусто. Обозначим пересечения $K_{i_1}, K_{i_2}, \ldots, K_{i_s}$ через $K_{i_1, i_2, \ldots, i_s}$. Образуем $\sum K_{i_1, i_2, \ldots, i_{r+1}}$ всех пересечений по $(r+1)$ множеств $K_i$. Каждое $K_{i_1, i_2, \ldots, i_{r+1}}$ имеет диаметр, меньший $\varepsilon$ (потому что диаметры всех $K_i$ меньше $\varepsilon$), и два различных $K_{i_1, i_2, \ldots, i_{r+1}}$ не могут пересекаться. Поэтому $\sum K_{i_1, i_2, \ldots, i_{r+1}} = \sum_{r+1}$ есть множество первой категории на $R$. Существует столь малое число $\eta$, что сфера $S(\sum_{r+1}, \eta)$ тоже 1-й категории на $R$. Образуем замкнутую разность $K - S(\sum_{r+1}, \eta) = K^{(1)}$. Множество $K^{(1)}$ допускает $(\varepsilon, r)$ покрытие. В самом деле, замкнутые множества $K_i^{(1)} = K_i \cdot K^{(1)}$ покрывают $K^{(1)}$, имеют диаметр, меньший $\varepsilon$, и никакие $r+1$ из них не могут пересекаться, ибо $K_i^{(1)}$ суть части $K_i$, а $r+1$ множество $K_i$ может пересечься только на $\sum_{r+1}$, т. е. вне $K^{(1)}$. По отношению к $K^{(1)}$ можем повторить ту же конструкцию, образовав $\sum_r = \sum K^{(1)}_{i_1, i_2, \ldots, i_r}$ всех пересечений $K_i^{(1)}$ по $r$ множеств. Беря разность $K^{(1)} - S(\sum_r, \eta_1) = K^{(2)}$ при достаточно малом $\eta_1$, разобьём $K^{(1)}$ на множество 1-й категории $S(\sum_r, \eta_1)$ и на множество $K^{(2)}$, допускающее $(\varepsilon, r-1)$ покрытие. Продолжая процесс, разложим $K$ на $r+1$ множество 1-й категории. Следовательно,

$$\mathrm{cat}_R K \leqslant r+1.$$

Следствие. Любое нигде не связное множество имеет на любом связном пространстве категорию 1. Поэтому, если замкнутое множество в связном пространстве имеет категорию больше, чем 1, оно содержит континуальную компоненту.

8. Аксиоматическое определение категории.

Будем рассматривать замкнутые множества $A$, заключённые в многообразии $R$, и целочисленные функции $n(A)$ этих множеств, удовлетворяющие следующим аксиомам:

1°. Если $A$ содержит только одну точку, то $n(A) = 1$.

2°. Если $A \supset B$, то $n(A) \geqslant n(B)$.

3°. $n(A+B) \leqslant n(A) + n(B)$.

4°. Если $B$ есть результат деформации $A$, то $n(B) \geqslant n(A)$.

5°. $n[S(A, \varepsilon)] = n(A)$, если $\varepsilon$ достаточно мало.

Категория замкнутых множеств есть целочисленная функция, удовлетворяющая этим аксиомам, причём для любого множества $A$ и для любой из целочисленных функций $n(A)$, удовлетворяющих условиям 1°—5°, $\mathrm{cat}_R A \geqslant n(A)$.

В самом деле, пусть $\mathrm{cat}_R A = 1$: существует точка $b$, к которой путём некоторой деформации сводится $A$. Но тогда (аксиомы 1° и 4°)

$$n(A) \leqslant n(b) = 1.$$

Так как $n(A) \geqslant 1$ (всякое множество содержит хоть одну точку), то

$$n(A) = 1.$$

Пусть, далее,

$$\mathrm{cat}_R A = k.$$

Существует разбиение:

$$A = \sum_{i=1}^{k} A_i, \quad \mathrm{cat}_R A_i = 1.$$

Имеем:

$$n(A_i) = 1,$$

$$n(A) \leqslant \sum_{i=1}^{k} n(A_i) = k.$$

Аксиомы 1°—5° вместе с условием максимальности однозначно определяют понятие категории.

В некоторых случаях удаётся оценить снизу одну из функций $n(A)$. Этим самым мы оцениваем снизу и $\mathrm{cat}_R A$.

## § 5. Оценка числа решений вариационной задачи*)

Докажем сейчас, что категория многообразия даёт нам оценку числа геометрически различных стационарных точек любой заданной на нём функции.

Допустим, что многообразие $R$ содержит по крайней мере одно множество категории $k$. Определим в $R$ топологические классы $[A_1]$, $[A_2]$, ..., $[A_k]$, где $[A_i]$ — класс всех множеств категории $\geqslant i$. Обозначим через $c_1, c_2, \ldots, c_k$ критические значения функции $f$, отвечающие этим классам соответственно. Мы, очевидно, имеем:

$$c_1 \leqslant c_2 \leqslant \ldots \leqslant c_k.$$

Теорема. *Если два критических значения $c_i$, $c_{i+p}$ функции $f$, принадлежащие классам $[A_i]$, $[A_{i+p}]$, равны $c_i = c_{i+p}$ и если существует минимальное множество $A^0_{i+p}$ класса $[A_{i+p}]$, расположенное внутри $R$, то существует множество категории $\geqslant p+1$ стационарных точек, в которых $f = c_i = c_{i+p}$.*

Доказательство. Пусть $c_i = c_{i+p} = c$. Пусть $A^{(0)}_{i+p}$ — минимальное множество в классе $[A_{i+p}]$, расположенное внутри $R$. Обозначим через $P$ совокупность стационарных точек на $(f = c)$.

Пусть $\mathrm{cat}_R P \leqslant p$. При достаточно малом $\varepsilon$

$$\mathrm{cat}_R S(P, \varepsilon) \leqslant p; \quad \mathrm{cat}_R [A^{(0)}_{i+p} - S(P, \varepsilon)] \geqslant i.$$

Обозначим $A^{(0)}_{i+p} - S(P, \varepsilon)$ через $A^{(0)}_i$. Мы имеем: $A^{(0)}_i \subset [A_i]$. Максимум $f$ на $A^{(0)}_i$ не может быть больше $c$, потому что $A^{(0)}_i \subset A^{(0)}_{i+p}$; но максимум $f$ на $A^{(0)}_i$ не может быть также меньше $c = c_i$, потому что категория $A^{(0)}_i \geqslant i$. Следовательно, максимум $f$ на $A^{(0)}_i$ равен $c = c_i$; $A^{(0)}_i$ есть минимальное множество в классе $[A_i]$, расположенное внутри $R$.

На основании принципа стационарной точки пересечения $A^{(0)}_i \cap (f = c)$ содержит одну по крайней мере стационарную точку $a$. $a$ находится на расстоянии не меньше $\varepsilon$ от множества $P$. Но это противоречит определению $P$ как множества всех стационарных точек на $(f = c) \cap A^{(0)}_{i+p}$. Следовательно, существует на $A^{(0)}_{i+p} \cap (f = c)$ множество стационарных точек категории $\geqslant p+1$.

Следствие. Число геометрически различных стационарных точек любой функции, определённой на многообразии $R$, не меньше чем категория $R$ относительно самого себя.

В самом деле. Пусть $\mathrm{cat}_R R = k$. $R$ содержит множества первых $k$ категорий и на $R$ можно определить, как выше, классы $[A_1]$, $[A_2]$, ..., $[A_k]$. Определим, как выше, особые значения $c_1, c_2, \ldots, c_k$. Если они все различны, то каждому

---

*) L. Lusternik, Topologische Grundlagan der allgemeinen Eigenwerttheorie, Monatsheft f. Math. u. Phys., 1930, 37, I.

из них отвечает по одной по крайней мере стационарной точке и число последних не меньше $k$. Если пара этих чисел совпадает, то число стационарных точек становится бесконечным.

Пример. Всякая функция с непрерывными производными до второго порядка, определённая на двухмерном торе $T$, имеет по крайней мере три геометрически различных стационарных точки. Функция имеет на торе двух измерений, вообще говоря, четыре аналитически различных стационарных точки: 1) минимум (или минимум максимумов на множествах первой категории), 2) минимум максимумов на классе, образованном из одного круга, негомологичного 0 на торе, при помощи деформации, 3) минимум максимумов на аналогичном классе, полученном из второго круга, негомологичного 0 и первому кругу, 4) максимум на торе или, если угодно, минимум максимумов на классе, полученном деформацией самого тора внутри себя, классе, который состоит из одного только тора.

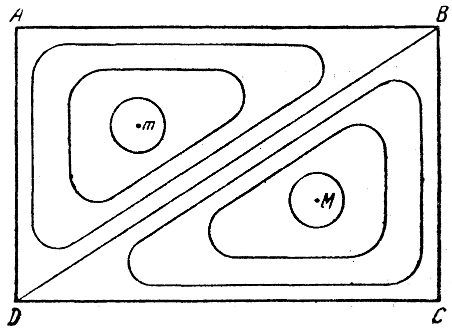

Рис. 3.

Но две из указанных стационарных точек, вторая и третья, могут для некоторых функций геометрически совпасть, как это легко показать на простых примерах. И это естественно, так как особые значения в этих точках принадлежат классам одной и той же категории. Но если бы минимум совпал с максимумом, очевидно, функция свелась бы к константе и в каждой точке на торе $df=0$. Из предыдущей теоремы вытекает, что если одна из точек 2 или 3 совпадает с одной из точек 1 или 4, то $f$ имеет на $T$ континуум второй категории на $T$ стационарных точек.

Укажем пример функции на торе, имеющей фактически только три геометрически различные стационарные точки.

Тор (рис. 3) можно рассматривать как прямоугольник $ABCD$ с идентифицированными противоположными сторонами ($AB$ с $CD$ и $BC$ с $AD$). Вершинам $A$, $B$, $C$, $D$ соответствует одна и та же точка на торе.

Рассмотрим функцию, для которой нарисованные на чертеже линии служат линиями уровня, причём $f$ имеет минимум в точке $m$, максимум в точке $M$, $f$ возрастает монотонно вдоль линий уровня, идущих вокруг $m$ к периферии треугольника $ADC$, а также вдоль линий уровня, стягивающихся от периферии $ABC$ к точке $M$. Линия уровня, отвечающая периметру $AB+BC$ $(=CD+DA)$ вместе с диагональю $AC$, содержит третью стационарную точку — именно точку, отвечающую идентифицированным вершинам $A$, $B$, $C$, $D$.

## § 6. Приложения и примеры

1. Теория собственных значений.

Пусть заданы квадратическая форма $n$ переменных $F=\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k$ и соответственная единичная форма $E=\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$.

Рассмотрим сферическое многообразие $n-1$ измерений $S_{n-1}$, определённое уравнением $E=1$. В стационарных точках $F$ на сфере $S_{n-1}$ мы имеем

$$d(F-\lambda E)=0$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k-\lambda x_i=0;\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Число $\lambda$ есть значение $F$ в соответствующей стационарной точке (характеристическое число формы $F$).

Обозначим через $R_{n-1}$ $n-1$-мерное проективное пространство, получаемое идентификацией диаметрально противоположных точек $S_{n-1}$.

Так как $F$ принимает в диаметрально противоположных точках $S_{n-1}$ равные значения, то изучение поведения $F$ на $S_{n-1}$ сводится к изучению её поведения на $R_{n-1}$.

В следующем параграфе доказывается, что категория $R_{n-1}$ относительно самого себя равна $n$. Существует $n$ критических значений $F$ на $R_{n-1}$, которые обозначим через $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$. Им отвечает $n$ стационарных точек на $R_{n-1}$ или $n$ пар диаметрально противоположных стационарных точек $F$ на $S_{n-1}$. Обозначим через $x_1^{(i)},\ x_2^{(i)},\ \ldots,\ x_n^{(i)}$ декартовы координаты одной из пары стационарных точек $S_{n-1}$, отвечающих особому значению $\lambda_i$. В этой точке градиент $F$ на $S_{n-1}$ (на гиперповерхности $E=1$) исчезает, следовательно,

$$d(F-\lambda_i E)=0,$$

т. е. $x_1^{(i)},\ x_2^{(i)},\ \ldots,\ x_n^{(i)}$, даёт решение системе симметричных линейных уравнений:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k-\lambda_j x_j=0;\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

($\lambda_j$ — так называемые собственные значения $F$).

Из общей теории категорий следует появление континуума стационарных точек $F$ на $S_{n-1}$ в случае равенства двух из чисел $\lambda_i$.

Рассуждения сохраняют силу, если $F$ и $E$ — произвольные однородные функции одинаковой степени, инвариантные по отношению к замене знака у всех переменных, и если $E=1$ гомеоморфно $(n-1)$-мерному сферическому многообразию.

Пример. Пусть $F$ — произвольная форма $2l$-го порядка, $E=\sum_{i=1}^{n} x_i^{2l}$. Существует $n$ вещественных чисел $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$, для которых система уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}-\lambda_i x_j^{2l-1}=0;\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

имеет нетривиальную вещественную систему решений. Слияние двух из чисел $\lambda_i$ влечёт появление континуума таких систем размерности $\geqslant k-1$, где $k$ — число совпавших чисел.

2. Пример. Пусть в пространстве даны $n$ замкнутых поверхностей $S_1$, $S_2$, $S_3$, $\ldots$, $S_n$ произвольного рода. Пусть на каждой поверхности расположено по материальной точке и эти точки взаимодействуют по любому закону, подчинённому лишь требованию, чтобы силы взаимодействия допускали потенциаль-

ную функцию. При этих условиях существует не менее $n+1$ положений равновесия, отвечающих различным уровням потенциальной функции. Если бы два из этих уровней совпали, то существовало бы для соответствующего уровня бесконечное множество положений равновесия.

В самом деле, множество положений $n$ точек на $n$ замкнутых поверхностях $S_1, S_2, \ldots, S_n$ образует многообразие $T$, являющееся топологическим произведением всех $S_i$: $T = S_1 \cdot S_2 \cdots S_n$. На основании следствия 3 § 9

$$\mathrm{kat}_T T \geqslant n+1.$$

Потенциальная функция сил взаимодействия $n$ точек зависит лишь от положения этих точек и является однозначной, непрерывной и трижды дифференцируемой функцией, определённой на $T$. Поэтому существует не менее $n+1$ точек, где $dT = 0$, т. е. точек равновесия системы (на основании общей теории категорий).

3. Алгебраический пример. Рассмотрим тор $T$ $n$ измерений, расположенный в $2n$-мерном эквлидовом пространстве $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, уравнения которого суть:

$$x_i^2 + y_i^2 = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Рассмотрим непрерывную и трижды дифференцируемую функцию $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, определённую на $T$; эта функция должна иметь на торе $T$ не менее $n+1$ стационарных точек.

Напишем уравнение стационарной точки на $T$. Полагая

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \\ = F - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i^2 + y_i^2),$$

имеем

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial y_i} = 0; \quad x_i^2 + y_i^2 = 1,$$

т. е. уравнения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x_i} - 2\lambda_i x_i = 0, \\ &\frac{\partial F}{\partial y_i} - 2\lambda_i y_i = 0 \end{aligned}\right\} \quad x_i^2 + y_i^2 = 1; \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

имеют всегда $n+1$ различных вещественных систем решений. Рассматриваемые уравнения могут быть, если исключить параметры $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, переписаны так:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x_i} y_i - \frac{\partial F}{\partial x_i} x_i = 0, \\ &\sum x_i^2 + y_i^2 = 1 \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

## § 7. Категория проективного пространства

Для многих задач важно уметь вычислять категорию проективного пространства $n$ измерений. Мы докажем сейчас элементарным путём теорему о категории проективных пространств, которую мы в следующем параграфе получим как следствие более общей теории (теории «делителей» многообразий), основанной на применении ряда предложений из области гомологической топологии.

Теорема. *Проективное пространство $n$ измерений имеет категорию $n+1$ относительно себя самого.*

Лемма 1. *Сферическая гиперповерхность $S_n$, $n$ измерений диаметра 1, заданная в $(n+1)$-мерном эвклидовом пространстве уравнением $x_1^2+x_2^2+ +\ldots+x_{n+1}^2=1$, не может быть разбита на $n+1$ множество диаметра $<1$, но может быть разбита на $n+2$ подобных множества.*

Доказательство. Начнём с доказательства второй части леммы. Достаточно вписать в $S_n(n+1)$-мерный тетраэдроид и разрезать соответственно $S_n$. Получаем разбиение $S_n$ на $(n+2)$ сферических $(n+1)$-мерных тетраэдроида диаметра $<1$.

Несколько сложнее доказательство первой части леммы.

Впишем в $S_n$ $(n+1)$-мерный куб $K$ и подразделим все его грани на малые кубики со сторонами длины $\frac{\varepsilon}{2}$. Спроектируем из центра сферы полученную на гранях сетку. Получим разбиение сферы $S_n$ на сферические кубики диаметра $<\varepsilon$. При этом каждые $(n-1)$-мерные грани кубика $f_{n-1}$ принадлежат двум $n$-мерным кубикам $f_n$, каждая $(n-2)$-мерная грань, не содержащая вершины основного куба $K$, $f_{n-2}$ принадлежит четырём $n$-мерным и $(n-2)$-мерная грань, содержащая вершину основного куба, принадлежит трём $n$-мерным кубикам.

Допустим, что $S_n$ разбита на $n+1$ множество $S_n$: $S_n=M_1+M_2+\ldots+M_{n+1}$, причём диаметры $\delta(M_i)$ множества $M$ все меньше 1. Очевидно, можно $S_n$ покрыть замкнутыми множествами $\overline{M_1}, \overline{M_2}, \ldots, \overline{M}_{n+1}$ того же диаметра.

Положим $\eta=\frac{1-\max\delta(M_i)}{3}$, $(i=1,2,\ldots,n+1)$.

Определим теперь множества $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_{n+1}$ следующим образом: $\mathfrak{M}_i$ есть совокупность всех кубиков кубильяжа со стороной $\leqslant\eta$, пересекающихся с $M_i$. Очевидно, диаметры всех $\mathfrak{M}_1$ меньше $1-\eta$.

Пусть $P$— множество на сфере. Обозначим через $\overline{P}$ множество, диаметрально противоположное $P$.

Рассмотрим разность $T_1=S_n-\mathfrak{M}_1-\overline{\mathfrak{M}_1}$.

Это множество состоит из кубиков и отделяет $\mathfrak{M}_1$ от $\overline{\mathfrak{M}_1}$, так как $\mathfrak{M}_1$ и $\overline{\mathfrak{M}_1}$ не могут пересекаться; если бы они имели общую точку $a$, то по симметрии они имели бы также общую точку $\overline{a}$, т. е. каждое из них было бы диаметра 1.

Перенумеруем в некотором порядке все кубики, содержащиеся в $T_1$. Выберем первым из них $k_1$, который пересекается с $\mathfrak{M}_1$, образуем суммы $\mathfrak{M}_1+k_1$, $\overline{\mathfrak{M}_1}+\overline{k_1}$. Возьмём далее первый кубик из $T_1-k_1-\overline{k_1}$, пересекающихся с $\mathfrak{M}_1+k_1$, и образуем $\mathfrak{M}_1+k_1+ +k_2$, $\overline{\mathfrak{M}_1}+\overline{k_1}+\overline{k_2}$. Продолжая тот же процесс, получим разбиение $S_n$ на две симметричесике части $N_1$ и $\overline{N_1}$.

Назовём первой границей $F_1$ множество тех граней $f_{n-1}$ $(n-1)$-го измерения, которые принадлежат одновременно $N_1$ и $\overline{N_1}$. Существование $F_1$ очевидно. Очевидны также следующие свойства:

1°. $F_1$ симметрично.

2°. Всякая половина большого круга на $S_n$ пересекает $F_1$ в нечётном числе точек (если она расположена так, что не имеет с $F_1$ целых общих граней).

Докажем следующие два дальнейших свойства $F_1$.

На $F_1$ всякая $(n-2)$-мерная грань $f_{n-2}$ принадлежит чётному числу граней $f_{n-1}$ измерения $n-1$. Действительно, если $f_{n-2}$ содержит вершину основного куба $K$, то она принадлежит трём $n$-мерным граням $f_n$, попарно между собою пересекающимся. Либо все три $f_n$ принадлежат одной и той же части $\overline{N_1}$ или $N_1$, либо же две из них принадлежат $N_1$ и одна $\overline{N_1}$ (или наоборот). В первом случае к $f_{n-2}$ прилегают 0, во втором — две $(n-1)$-мерные грани $f_{n-1}$. Аналогично, если грань $f_{n-2}$ не содержит вершины куба $K$, она принадлежит четырём $n$-мерным кубикам и 0, 2 или 4 $(n-1)$-мерным граням из $F_1$.

Определим путём индукции $F_k$ следующим образом:

1°. $F_k$ состоит из граней $n-k$ измерений $f_{n-k}$.

2°. Всякая грань $(n-k-1)$-го измерения $f_{n-k-1}$ из $F_k$ принадлежит чётному числу $f_{n-k}$.

3°. $F_k$ содержится в пересечении $N_k$ и $\overline{N_k}$.

4°. $F_k$ пересекается в нечётном числе пар точек со всякой большой сферой $k$ измерений на $S_n$, определённой уравнениями

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2=1;\ \alpha_1^j x_1+\alpha_2^j x_2+\ldots+\alpha_{n+1}^j x_{n+1}=0 \quad (j=1, 2, \ldots, n-k),$$

($\alpha_i^j$ — постоянные числа).

5°. $F_k$ симметрично относительно центра сферы $S_n$. Пусть $F_j$, $N_j$ $(j\leqslant k-1)$ определено. $N_k$ строится следующим образом: выберем первое из $f_{n-k+1}$, пересекающееся с некоторым $\mathfrak{M}_j$, не входившее при определении предыдущих $F_l$. Перенумеруем все $(n-k+1)$-мерные кубики $f_{n-k+1}$, содержащиеся в $F_{k-1}-\mathfrak{M}_j-\overline{\mathfrak{M}}_j$. Выберем первый из них $k_1$, пересекающийся с $\mathfrak{M}_j$, и образуем $\mathfrak{M}_j+k_1$, $\overline{\mathfrak{M}}_j+\overline{k}_1$ и т. д., пока не исчерпаем всех кубиков, входящих в $F_{k-1}$.

Мы получим разбиение

$$F_{k-1}=(F_{k-1}\cap\mathfrak{M}_j+\sum k_l)+(\overline{F}_{k-1}\cap\overline{\mathfrak{M}}_j+\sum\overline{k}_l).$$

Определяем:

$$N_k=F_{k-1}\cap\mathfrak{M}_j+\Sigma k_l,$$
$$\overline{N}_k=\overline{F}_{k-1}\cap\overline{\mathfrak{M}}_j+\Sigma\overline{k}_l.$$

Определяем, наконец, множество $F_k$ как совокупность кубиков $f_{n-k}$ $(n-k)$ измерений, которые принадлежат нечётному числу $f_{n-k+1}$ из $N_k$ и нечётному числу $f_{n-k+1}$ из $\overline{N}_k$.

Докажем, что определённое таким образом множество $F_k$ обладает свойствами 1°—5°. Свойства 1°, 3°, 5°, очевидно, выполняются.

Доказательство свойства 2°. Всякое $f_{n-k-1}$ на $F_{k-1}$ принадлежит некоторому $f_{n-k+1}$. Рассмотрим включение $f_{n-k-1}\subset f_{n-k}\subset f_{n-k+1}$. Внутри данного $f_{n-k+1}$ существуют два $f_{n-k}$, содержащие данный $f_{n-k-1}$.

Отметим знаком $+$ все те $f_{n-k}\supset f_{n-k-1}$, для которых $f_{n-k+1}$ принадлежит $N_k$. Общее число употреблённых знаков $+$ чётное. Поэтому число $f_{n-k}$, отмеченных нечётным числом знаков $+$, должно быть чётным, т. е. число $f_{n-k}$, содержащих данный $f_{n-k-1}$, принадлежащих $F_k$, чётное.

Этим проверено выполнение для $F_k$ свойства 2°.

Доказательство свойства 4°. Рассмотрим $k$-мерную сферу $v_k$ и её половину $u_k$. $u_k$ пересекает $F_{k-1}$ по конечной совокупности сегментов $T$. Граница $u_k$ есть $(k-1)$-мерная сфера $v_{k-1}$. $v_{k-1}$ пересекает $F_{k-1}$ по нечётному числу пар симметрических точек, которые обозначим через $(P_l, \overline{P}_l)$.

Сферу $v_{k-1}$ можно считать находящейся в общем положении по отношению к $(n-k)$-мерному комплексу $F_k$, т. е. их пересечение пустым. Нечётное число пар точек пересечения $v_{k-1}\cap F_{k-1}$ расщепляется на нечётное число точек $v_{k-1}\cap N_{k-1}$ и такое же число $v_{k-1}\cap\overline{N}_k$.

Отметим каждый конец одномерной грани $T$, входящей в $N_k$, знаком $+$. Общее число этих знаков *чётное*. В том числе *нечётное* число знаков $+$ отмечают точки $v_{k-1}\cap N_k$. Остаётся *нечётное* число знаков $+$, которыми отмечаются точки пересечения $a_l$ $(n-k)$-мерных граней $f_{n-k}^i$ из $N_k$ с $u_k$. Могут представиться два случая.

1) грань $f^l_{n-k}$ лежит вне $F_k$; она входит в чётное число $(n-k+1)$-мерных граней $f_{n-k+1}$ из $N_k$; каждая из этих $f_{n-k+1}$ пересекает $u_k$ по ребру из $T$; соответственная точка $a_l$ является концом *чётного* числа таких рёбер и отмечена *чётным* числом знаков $+$. Общее число знаков $+$, которыми отмечены все такие точки $a_l$ — *чётное*, и ещё остаётся *нечётное* число знаков $+$. 2) $f^j_{n-k}$ лежит в $F_k$; она входит, по определению $F_k$, в *нечётное* число граней $f_{n-k+1}$ из $N_k$; соответственная точка $a_j$ поэтому является концом *нечётного* числа рёбер $T$, отмечена *нечётным* числом знаков $+$. На долю всех таких точек $a_j$ приходится *нечётное* число знаков $+$, число этих точек поэтому нечётное.

Итак, $F_k$ имеет нечётное число точек пересечения с полусферой $u_k$, и, следовательно, *нечётное* число пар точек пересечения со сферой $v_k$. Условие 4° выполнено.

Таким образом определённое $F_k$ обладает всеми свойствами 1°—5°.

Доказательство леммы 1. Пусть $S_n$ разбита на $n+1$ часть: $S_n = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \ldots + \mathfrak{M}_{n+1}$.

Образуем последовательно $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_{n+1}$. Они все непусты.

$F_{n+1}$ покрыто единственной $\mathfrak{M}'_l$, которая содержит поэтому пару симметрических точек и имеет диаметр 1. Получаем противоречие.

*Лемма 2. Если $S_n$ разбита на $n$ частей $\mathfrak{M}_i$, определённых в лемме 1, по крайней мере одна часть из $\mathfrak{M}_i$ содержит симметрический, относительно центра $S_n$, замкнутый полигон. Аналогично при разбиении на $n$ произвольных замкнутых множеств $M_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ по крайней мере одно из них содержит симметрический, относительно центра $S_n$, континуум.*

Доказательство леммы 2. $F_n$, определённое выше, обладает следующими свойствами:

1. $F_n$ состоит из интервалов 1-го измерения.
2. $F_n$ — симметрично.
3. Если $F_n$ разбито на две симметрические части $A$ и $B$, существуют граничные точки между $A$ и $B$.

Из этих свойств вытекает связность $F_n$: пусть

$$F_n = A + B,$$

где

$$A \cap B = 0.$$

Имеем:

$$F_n = (A \cap \overline{B} + B \cap \overline{A}) + (A \cap \overline{A} + B \cap \overline{B}).$$

Очевидно, $(A \cap \overline{B} + B \cap \overline{A}) \cap (A \cap \overline{A} + B \cap \overline{B}) = 0$, и мы имеем разбиение $F_n$ на две симметрические части без общих точек. Получаем противоречие.

На $F_n$ возможно поэтому выбрать две симметрические точки и соединить их двумя симметрическими полигонами. Получим симметрический полигон на $F_n$. При помощи перехода к пределу можно доказать, что при разбиении $F_n$ на $n$ произвольных замкнутых $F_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ одно из них, по крайней мере, содержит симметрический континуум.

Доказательство теоремы. $n$-мерное проективное пространство $R_n$ может быть рассматриваемо как сфера $S_n$, с идентифицированными диаметрально противоположными точками. Всякий континуум на $R_n$, отвечающий симметрическому континууму на сфере $S_n$, не может быть сведён к точке внутри $R_n$, и обратно, всякому несводимому к точке континууму на $R_n$ отвечает на $S_n$ симметрический континуум.

Из доказанной леммы 2 следует, что при разбиении $R_n$ на $n$ частей по крайней мере одна часть содержит континуум, несводимый к точке внутри $R_n$.

С другой стороны, можно, очевидно, разбить $R_n$ на $n+1$ сводимую к точке часть, взяв тетраэдрическое разбиение сферы и построив аналогичное разбиение проективного пространства. (При этом одна из частей тетраэдрического разбиения сферы лишняя.)

Это доказывает теорему.

## § 8. Применение методов гомологической топологии к оценке категории

Как было доказано в § 3, категория замкнутого множества равна категории некоторого объемлющего его комплекса. Этим самым мы получаем возможность применять методы комбинаторной топологии к теории категорий. Но так как основным понятием этой части топологии является понятие гомологии, то мы сейчас определим основанный на понятии гомологии инвариант, аналогичный категории. Будем называть его «комбинаторной категорией» (гомологии мы рассматриваем для простоты по модулю 2).

Определение. *Назовём комплекс $K$, заключённый в многообразии $R$, комплексом комбинаторной категории 1 относительно $R$, если любой заключённый в нём цикл гомологичен нулю в $R$.*

Назовём комплекс $K \subset R$ комплексом комбинаторной категории $k$ относительно $R$, если $K$ может быть разбит на $k$ частей 1-й комбинаторной категории относительно $R$, но не может быть разбит на меньшее число комплексов 1-й комбинаторной категории.

Будем обозначать комбинаторную категорию символом kat в отличие от символа cat, означающего категорию, определённую на стр. 172.

Комбинаторную категорию замкнутого множества $A$ будем считать равной наименьшей из комбинаторных категорий заключающих его комплексов.

Комбинаторная категория относительно $R$, как можно непосредственно убедиться, есть целочисленная функция замкнутого множества $A$ в $R$, удовлетворяющая аксиомам 1°—5° § 3.

На основании полученных нами результатов имеем

$$\mathrm{kat}_R A \leqslant \mathrm{cat}_R A.$$

Множества комбинаторной категории 1 имеют особо простую структуру. Именно:

Теорема. *Пусть $M$ — множество комбинаторной категории 1 в многообразии $R_n$, $z$ — произвольный цикл в $R_n$; тогда цикл $z$ можно снять с $M$, т. е. в $R_n - M$ заключён цикл $z_1$, гомологичный $z$ в $R_n$: $z \sim z_1$, $|z_1| \cap M = 0$.* Эта теорема является частным случаем теоремы Л. С. Понтрягина «о снятии цикла».

Пусть $K$ — подкомплекс многообразия $R_n$, $z_k$ — $k$-мерный цикл в $R_n$, так что для любого цикла $z_{n-k}$ размерности $n-k$, заключённого в $K$, индекс пересечения $\chi(z_k, z_{n-k})$ в $R_n$ равен нулю, $\chi(z_k, z_{n-k}) = 0$, тогда $z_k$ можно снять с $K$, т. е. существует в $R_n$ гомологичный ему цикл $\overline{z}_k$, $\overline{z}_k \sim z_k$, целиком расположенный в $R_n - K$[1]).

Если $M$ есть множество категории 1, то оно заключено в комплексе $K$ категории 1, все циклы $z_{n-k}$, заключённые в $K$, гомологичны нулю в $R_n$, а потому для любого цикла $z_k$, $\chi(z_k, z_{n-k}) = 0$, поэтому $z_k$ можно снять с $K$.

---

[1]) Доказательство теоремы Л. С. Понтрягина воспроизведено в следующем выпуске «Успехов» в его статье «Топологические теоремы двойственности».

Следствие 1. Если многообразие $R_n$ содержит хотя бы один цикл $z_k$, негомологичный в нём нулю, то $\operatorname{kat} R_n > 2$.

В самом деле, если $\operatorname{kat} R_n = 2$, то $R_n = K_1 + K_2$, $\operatorname{kat} K_1 = \operatorname{kat} K_2 = 1$, но, в силу теоремы, $z_k$ можно снять с $K_1$, т. е. $z'_k \sim z_k$ и $z'_k \in K_2$; но это противоречит предположению, что $\operatorname{kat} K_2 = 1$.

Следствие 2. Для двумерных многообразий $R_2$ (поверхностей) $\operatorname{kat} R_2 = \operatorname{cat} R_2$.

Именно, если $R_2$ есть двумерная сфера, то

$$\operatorname{kat} R_2 = \operatorname{cat} R_2 = 2.$$

Во всех остальных случаях $R_2$ содержит негомологичный нулю одномерный цикл, значит, в силу следствия 1, $\operatorname{kat} R_2 \geqslant 3$. Но, по теореме § 4,7, $\operatorname{cat} R_2 \leqslant 3$, отсюда, так как $\operatorname{cat} R_2 \geqslant \operatorname{kat} R_2$, имеем: $\operatorname{cat} R_2 = \operatorname{kat} R_2 = 3$. Например, категории (гомотопические и комбинаторные) тора, проективной плоскости и др. равны 3.

При $n > 2$ может иметь место неравенство:

$$\operatorname{cat} R_n > \operatorname{kat} R_n.$$

Например, для $n = 3$ Пуанкаре привёл пример многообразия $F_3$, у которого все циклы (размерностей 0, 1, 2) гомологичны нулю, но фундаментная группа которого не равна нулю (это многообразие, следовательно, негомеоморфно трёхмерной сфере). Очевидно, $\operatorname{kat} F_3 = 2$. С другой стороны, Borsuk[1]) доказал теорему о том, что при неравенстве нулю фундаментальной группы на многообразии его гомотопическая категория не меньше 3, поэтому $\operatorname{cat} F_3 \geqslant 3 > \operatorname{kat} F_3 = 2$[2]).

## § 9. Делители многообразия

Для оценки категорий мы воспользуемся теорией так называемых «делителей» многообразий, которую мы сейчас разовьём.

Определение. *Назовём делителем многообразия $M$ заключённое в нём многообразие $M_1$, удовлетворяющее следующему условию: если $z$ есть цикл в $M_1$, гомологичный нулю в $M$, то он гомологичен нулю внутри самого $M_1$.*

Для оправдания терминологии заметим, что если многообразие $M$ есть произведение многообразий $M_1$ и $M_2$, то $M_1$ есть делитель $M$. В этом случае налицо также «частное» $M_2$ (доказательство см. ниже). В общем случае из существования делителя многообразия $M$ отнюдь не следует существование частного, т. е. многообразия, на которое надо помножить делителя, чтобы получить $M$. Здесь имеет место некоторая аналогия с понятием делимости в теории идеалов. Свойства делителей, как видно из дальнейшего, тесно связаны с кольцом многообразия.

---

1) Borsuk K. Über den Lusternik — Schnirelmannschen Begriff der Kategorie, Fund. Math., XXVI (1936).

2) Л. Э. Эльсгольц предложил следующий инвариант многообразия $R_n$, оценивающий число критических точек любой функции $f$ на $R_n$, обозначенный им $ElR_n$. Этот инвариант равен наименьшему числу элементов, которые покрывают $R_n$. Очевидно, $ElR_n \geqslant \operatorname{cat} R_n$. Остаётся открытым вопрос, имеет ли место равенство $ElR_n = \operatorname{cat} R_n$, см. Эльсгольц, Теория инвариантов, дающих оценку числа критических точек..., Матем. сборник, 1939, 5, № 3, 551—558.

Теорема. *Пусть дано многообразие $M$, обладающее последовательностью вложенных друг в друга делителей $M \supset M_1 \supset M_2 \supset \ldots \supset M_r$, где всякий $M_{i+1}$ есть делитель $M_i$, а $M_r$ есть точка. При этих условиях* $\mathrm{kat}_M M \geqslant r+1$ (категория относительно себя самого); *тем более*, $\mathrm{cat}_M M \geqslant r+1$.

Лемма 1. *Существует для всякого $M_i$ $(i=1, 2, \ldots, r+1)$ цикл $v_{i+1}$, высекающий $M_{i+1}$ из $M_i$*[1]), *т. е, $v_{i+1}$ пересекает $M_i$ по циклу $P_i$, гомологичному $M_{i+1}$ в $M_i$.*

Доказательство. Пусть измерения $M$, $M_i$, $M_{i+1}$ суть соответственно $n$, $k$ и $l$. Тогда, как известно, существует базис $u_1, u_2, \ldots, u_j$ всех $k-l$-мерных циклов $M_i$, обладающий тем свойством, что (кронекеровские) индексы пересечения $\chi(u_p, M_{i+1})$ *и* по отношению к $M_i$ суть:

$$\chi_{M_i}(u_1, M_{i+1})=1,\ \chi_{M_i}(u_2, M_{i+1})=\ldots=\chi_{M_i}(u_j, M_{i+1})=0$$

($u_1$ в этом базисе двойственен к $M_{i+1}$ по отношению к $M_i$).

Так как $u_p$ независимы в $M_i$, то они независимы и в $M$, по отношению к которому $M_i$ есть делитель.

Аналогично, в $M$ существует такой $n-k+l$-мерный цикл $v_{i+1}$, что $\chi_M(u_1, v_{i+1})=1$, $\chi_M(u_2, v_{i+1})=\ldots=\chi_M(u_j, v_{i+1})=0$. Ввиду того, что $M_{i+1}$ и $v_{i+1}\times M_i$ имеют одинаковые индексы пересечения со всеми циклами $u_p$:

$$\chi_{M_i}(u_p, M_{i+1})=\chi_{M_i}(u_p, v_{i+1}\times M_i),$$

мы можем заключить, что $M_i \times v_{i+1}$ гомологично $M_{i+1}$ в $M_i$.

Доказательство теоремы. Пусть $M=A_1+A_2+\ldots+A_m$, $\mathrm{kat}_M A_i=1$ и пусть $m\leqslant r$.

Из формулированной в предыдущем параграфе теоремы Л. С. Понтрягина [14] следует существование в $M$ цикла, гомологичного в $M$ любому наперёд заданному циклу и не пересекающего данного $A_i$. Согласно предыдущему, мы можем построить ряд циклов $v_1, v_2, \ldots, v_m$ таким образом, чтобы

$$\begin{aligned}
&v_1\sim M_1;\ v_1\cap A_1=0;\\
&v_2\times M_1\sim M_2;\ v_2\cap A_2=0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&v_m\times M_{m-1}\sim M_m;\ v_m\cap A_m=0
\end{aligned}$$

(все гомологии взяты относительно $M$).

Пересечение $v_1\times v_2\times\ldots\times v_i$ гомологично $M_i$ и не пересекает $A_1+ +A_2+\ldots+A_i$.

В частности, $v_1\times v_2\times\ldots\times v_m\sim M_m$, т. е. непусто. С другой стороны, $v_1\times v_2\times\ldots\times v_m$ не пересекает $A_1+A_2+\ldots+A_m=M$. Мы получили противоречие, которое доказывает, что $m\geqslant r+1$.

Следствие 1. Проективное пространство $R_n$ $n$ измерений имеет категорию $n+1$ относительно себя самого.

Лемма 2. *Всякое проективное пространство $R_k\subset R_n$ $k$ измерений является делителем пространства $R_n$.*

---

[1]) Это значит: $v_{i+1}\times M_i\sim M_{i+1}$, где пересечения берутся в пространстве $M$, при этом

$$\dim M+\dim M_{i+1}=\dim v_{i+1}+\dim M_i.$$

В самом деле, пусть $z$ есть цикл в $R_k$, гомологичный 0 в $R_n$, т. е. существует комплекс $T$, граница которого равна $z$. Выберем проективное пространство $R_{n-1} \supset R_k$. Возьмём точку $a$ в $R_n$, не принадлежащую ни $T$, ни $R_{n-1}$, и проектируем $T$ из точки $a$ на $R_{n-1}$. Мы получим комплекс $T_1$, граница которого равна проекции $z$ на $R_{n-1}$, т. е. есть $z$, потому что $z$ принадлежит $R_k \subset R_{n-1}$. Повторим эту операцию. Проведём проективное пространство $R_{n-2} \subset R_{n-1}$ и содержащее $R_k$ и найдём точку $a_1 \subset R_{n-1}$ вне $T_1$ и $R_{n-2}$ и проектируем $T_1$ на $R_{n-2}$ из $a_1$. Получим $T_2$, граница которого есть снова $z$. Если мы повторим эту операцию достаточное число раз, мы получим комплекс $T_j$, граница которого есть $z$ и который заключён внутри $R_k$.

Из предыдущего заключаем: всякий цикл, содержащийся в $R_k \subset R_n$ и гомологичный 0 в $R_n$, гомологичен 0 также и в $R_k$.

Поэтому $R_k$ есть делитель $R_n$.

Наибольшее число последовательных делителей для многообразия $M$ будем обозначать $\operatorname{Rang} M$ (ранг многообразия $M$). Из доказанной теоремы следует:

$$\operatorname{kat} M \geqslant \operatorname{Rang} M.$$

Образуем теперь последовательность делителей $R_n \supset R_{n-1} \supset R_{n-2} \supset \ldots \supset R_0$. Длина этой последовательности равна $n+1$, $\operatorname{Rang} R_n \geqslant n+1$. В силу предыдущего заключаем, что $\operatorname{kat} R_n \geqslant n+1$. Но $R_n$, $n$ измерений, следовательно (см. § 4) $\operatorname{cat} R_n \leqslant n+1$, а так как $\operatorname{cat}_{R_n} R'_n \geqslant \operatorname{kat}_{R_n} R_n$, то

$$\operatorname{cat} R_n = \operatorname{kat} R_n = \operatorname{Rang} R_n = n+1.$$

Аналогичными рассуждениями нетрудно доказать:

Следствие 2. Тор $n$ измерений (т. е. $n$-я степень круга) имеет категорию $n+1$.

Следствие 3. Произведение $M$ многообразий $M_1, M_2, \ldots, M_k$ имеет категорию не ниже $k+1$.

(Под произведением многообразий $M_1$ и $M_2$ понимается, как обычно, многообразие $M$, которое получится, если рассмотреть все пары $(t_1, t_2)$, где $t_1$ есть точка $M_1$, $t_2$ — точка $M_2$, и за окрестность точки $(t_1, t_2)$ принять совокупность пар $(t'_1, t'_2)$, где $t'_1$ и $t'_2$ пробегают некоторые окрестности точек $t_1$ и $t_2$ в $M_1$ и $M_2$ соответственно.)

Доказательство. Докажем, что многообразие $M_1$ — совокупность точек $(t_1, t_2)$, где $t_2$ фиксировано и равно $t_2^0$, — есть делитель произведения $M_1 \cdot M_2$. Пусть на $M_1$ лежит цикл $L$, гомологичный 0 в $M_1 \cdot M_2$. Существует комплекс $T$, лежащий в $M_1 \cdot M_2$, граница которого равна $L$. Всякая точка $T$ имеет две «координаты» — точку $t_1 \subset M_1$ и $t_2 \subset M_2$. Рассмотрим комплекс, полученный из $T$ таким образом, что для каждой точки $(t_1, t_2)$ вместо $t_2$ взято $t_2^0$. Всякий комплекс $T$ из $M_1 \cdot M_2$ отобразится при этом на некоторый комплекс $T_1$, и границы комплекса перейдут в границы соответствующего ему комплекса. Поэтому граница по модулю 2 комплекса $T$ перейдёт в границу по модулю 2 комплекса $T_1$. Но граница $L$ комплекса $T$ остаётся при преобразовании неподвижной. Поэтому граница $T_1$ равна $L$. Таким образом, если цикл $L \subset M_1$ гомологичен нулю в $M_1 \cdot M_2$, то он гомологичен нулю также и в $M_1$, т. е. $M_1$ есть делитель $M_1 \cdot M_2$. Отсюда заключаем, если $M = M_1 \cdot M_2, \cdots, M_k$ и $M_0$ — некоторая точка из $M_1$, то $M_0$,

$M_1, M_1 \cdot M_2, \ldots, M_1 \cdot M_2, \cdots M_{k-1} \cdot M_k$ есть цепочка возрастающих делителей $M$ длины $k+1$. В силу общей теоремы

$$\operatorname{cat} M \geqslant \operatorname{kat} M \geqslant k+1.$$

Примечание. Можно несколько усилить это предложение. Для этого достаточно установить следующую лемму: если $M = M_1 \cdot M_2$ и $P$ есть делитель $M_1$, то $P \cdot M_2$ есть делитель $M$.

Отсюда выводим: ранг произведения $M_1 \cdot M_2$ не менее суммы рангов сомножителей

$$\operatorname{Rang}(M_1 \cdot M_2) \geqslant \operatorname{Rang} M_1 + \operatorname{Rang} M_2.$$

Отсюда следует:

$$\operatorname{cat}(M_1 \cdot M_2, \cdots, M_k) \geqslant \operatorname{kat}(M_1 \cdot M_2, \cdots, M_k) \geqslant \operatorname{Rang} M_1 + \ldots + \operatorname{Rang} M_k.$$

Следствие 4. Комбинаторная категория делителя относительно объемлющего многообразия совпадает с его внутренней категорией. (Если $N$ есть делитель $M$, то

$$\operatorname{kat}_M N = \operatorname{kat}_N N.)$$

Доказательство. Цикл из $N$, гомологичный нулю относительно $M$, тем самым гомологичен нулю относительно $N$. (В силу определения делителя.) Цикл из $N$, гомологичный нулю в $N$, очевидно, тоже гомологичен нулю в $M$.

Следствие 5. Если имеем делитель $M_1$ многообразия $M$, допускающий ряд делителей $M_1 \supset M_2 \supset \ldots \supset M_k$, то относительная комбинаторная категория $M_1$ в $M$ больше или равна $k$. Это вытекает из следствия 4 и основной теоремы.

Следствие 6. Категория проективного пространства $R_k$ относительно любого заключающего его проективного пространства большего числа измерений $R_n$ равна $k+1$ (независимо от $n$). В самом деле, $R_k$ есть делитель $R_n$, и предложение вытекает из следствия 5.

Примечание. Из свойств делителя было использовано на протяжении настоящего параграфа лишь его свойство, выраженное в лемме 1: делитель $M_i$ есть цикл, «высекаемый» из «делимого» $M_{i-1}$ посредством некоторого цикла $z_i : M_i \sim M_{i-1} \times z_i$.

Поэтому, как это было фактически сделано в работе С. Фролова и Л. Эльсгольца[1]), можно пользоваться «обобщёнными делителями»: цикл $X$ есть «обобщённый делитель» цикла $Y$, если существует цикл $z$, «высекающий» $X$ из цикла $Y : X \sim Y \times z$. Наиболее длинная цепь вложенных друг в друга «обобщённых делителей» в $P_n$ есть наибольшее число циклов в $P_n$, пересечение которых негомологично нулю. Этот инвариант назван авторами цитируемой работы «длиной» многообразия $P_n$, и он оказался весьма удобным для оценки числа критических точек многообразия. Если обозначать длину многообразия $P_n$ через $\operatorname{long} P_n$, то имеет место неравенство

$$\operatorname{kat} P_n \geqslant \operatorname{long} P_n \geqslant \operatorname{rang} P_n.$$

Правая часть неравенства вытекает из того, что наиболее длинная цепь «обобщённых делителей» во всяком случае не короче любой цепи делителей, рас-

[1]) Froloff S. et Elsholz L., Limite inférieure pour le nombre des valeurs critiques d'une fonction, donné sur une variété, Мат. сб. 42 (5), 637—643.

сматривавшихся в настоящем параграфе. Левая часть неравенства доказывается применением теоремы Л. С. Понтрягина.

Без труда можно доказать, что длина проективного пространства $R_n$, $\operatorname{long} R_n = n+1$, значит $\operatorname{kat} R_n \geqslant n+1$. С другой стороны, $\operatorname{kat} R_n \leqslant \operatorname{cat} P_n \leqslant n+1$, отсюда $\operatorname{cat} P_n = \operatorname{kat} P_n = n+1$. Л. Эльсгольц доказал также, что длина топологического произведения двух многообразий равна сумме длин этих многообразий[1]).

## § 10. Псевдокатегория псевдо-проективного пространства

Назовём псевдо-проективным пространством $P_{2n}$ следующее $2n$-мерное топологическое пространство: точкой пространства $P_{2n}$ служит пара точек $(a, b)$, лежащих на $n$-мерной сфере $S_n$. При этом точки $(a, b)$ и $(b, a)$ считаются тождественными. Определим расстояние между двумя элементами $(a, b)$ и $(c, d)$ как меньшее из чисел

$$[\rho(a, c)+\rho(b, d)],\ [\rho(a, d)+\rho(b, c)].$$

Если $a \neq b$, то в $P_{2n}$ окрестность $(a, b)$ гомеоморфна $2n$-му. Значит, $P_{2n}$ есть $2n$-мерное многообразие с $n$-мерным множеством $O$ особых точек, отвечающих парам слившихся точек $(a, a)$ сферы $S_n$. Будем называть множество $M$ из $P_{2n}$ внутренним, если оно не содержит точек $O$.

В дальнейшем мы без оговорок будем рассматривать только такие деформации множеств из $P_{2n}$, при которых точки особого множества $O$ остаются неподвижными. Всякому континууму $K$ в $P_{2n}$ отвечает некоторое замкнутое множество $L$ на $S_n$. Докажем, что оно состоит самое большее из двух компонент. В самом деле, рассмотрим некоторую пару точек $K:(a, b)$ и $(c, d)$. Так как $K$ континуум, то точки $(a, b)$ и $(c, d)$ могут быть соединены $\varepsilon$-цепью при сколь угодно малом $\varepsilon$. При этом точка $a$ соединится либо с $c$, либо с $d$. Поэтому одна из точек $c$ или $d$ принадлежит той же компоненте множества $L$, что и $a$. Рассмотрим компоненты точек $a$ и $c$ в $L$. Очевидно, если точка $c$ принадлежит той же компоненте, что $a$, $d$ принадлежит той же компоненте, что и $b$ (ибо $(a, b)$ с $(c, d)$ соединены $\varepsilon$-цепью при любом $\varepsilon$). Итак, $L$ состоит самое большее из двух компонент — компоненты, к которой принадлежит точка $a$, и компоненты, к которой принадлежит точка $b$. Эти компоненты могут сливаться в одну.

Рассмотрим такой континуум $K$, в котором всякая точка может быть соединена с самой собой $\varepsilon$-цепью при любом $\varepsilon$ так, что точка $a$ перейдёт в $b$, а $b$ перейдёт в $a$. Будем говорить, что $K$ обладает $A$-свойством.

Очевидно, в этом случае $L$ есть континуум. Рассматриваемое свойство остаётся инвариантным при деформации $K$ в $P_{2n}$ с сохранением образа $K$. Поэтому при любой деформации $K$ в $P_{2n}$ отвечающее ему $L$ остаётся континуумом. Отсюда следует, что, при неподвижности точек из $O$, $K$ может быть сведён деформацией внутри $P_{2n}$ только к точке из $O$ и ни к какой внутренней точке. В самом деле, для всякой точки, отличной от $O$, множество, отвечающее ей,

---

[1]) Л. Эльсгольц, Длина многообразия и её свойства. Матем. сборник, 1939, 5, № 3, 565—571.

состоит из двух обыкновенных точек, т. е. не является континуумом, в то время как $L$, отвечающее $K$, остаётся при любой деформации континуумом.

Определим теперь инвариант, аналогичный категории, который мы назовём псевдокатегорией замкнутых множеств в $P_{2n}$.

1°. Назовём множество $C \subset P_{2n}$ псевдокатегории 1, если оно может быть сведено к внутренней точке, отличной от точек $O$ (при помощи деформации, сохраняющей $O$ инвариантным).

2°. Назовём множество $B \subset P_{2n}$ псевдокатегории $k$, если оно может быть разбито на $k$ частей 1-й псевдокатегории. Мы пишем $p \operatorname{cat} B = k$. Докажем, что в $P_{2n}$ существуют замкнутые множества, псевдокатегория которых равна $1, 2, \ldots, n+1$. В самом деле, рассмотрим на $P_{2n}$ проективное $n$-мерное пространство $R_n$ пар диаметрально противоположных точек сферы $S_n$. При разбиении $R_n$ на $n$ частей непременно хоть одна из этих частей содержит континуум, отвечающий симметрическому континууму на сфере. Этот континуум обладает свойством $A$ и не может быть сведён в $P_{2n}$ к какой-либо внутренней точке при помощи деформации (сохраняющей $O$ инвариантным). Поэтому $R_n$ имеет псевдокатегорию не ниже $n+1$ относительно $P_{2n}$, и нетрудно доказать, что $n$-мерное замкнутое внутреннее множество (не содержащее точек $O$) не может иметь псевдокатегорию, большую $n+1$ (рассуждениями, аналогичными рассуждениям в теореме 7, § 4). Имеем:

$$p \operatorname{kat}_{P_{2n}} R_n = n+1.$$

Приложение. Оси многообразия, гомеоморфного $n$-мерной сфере

Рассмотрим многообразие $G_n$, гомеоморфное $n$-мерному сферическому многообразию и расположенное в некотором эвклидовом пространстве $m$ измерений $E_m$, $(m > n)$, представленное уравнениями

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0; \quad F_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \ \ldots, \ F_{m-n}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0,$$

где $F_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ имеют непрерывные частные производные до 3-го порядка. Будем называть осью $G_n$ пару точек, лежащих на $G_n$, и таких, что функция $\rho(x, y)$, равная расстоянию точек $x$ и $y$ в $E_m$, имеет в паре точек $a$, $b$ экстремум при условии, что $x$ и $y$ лежат на $G_n$. Имеем: координаты $a_1, a_2, \ldots, a_m$; $b_1, b_2, \ldots, b_m$ точек $a$ и $b$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\sum_{j=1}^{m}(x_j - y_j)^2 - \lambda_1 F_1 - \lambda_2 F_2 - \ldots - \lambda_{m-n} F_{m-n}\right\} = 0,$$

$$F_1 = F_2 = \ldots = F_{m-n} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

и аналогичным уравнениям, в которых вместо $x_i$ стоят $y_i$, где $x_i = a_i$, $y_i = b_i$.

Нетрудно видеть, что прямая, соединяющая точки $a$ и $b$, нормальна к $G_n$ в точках $a$ и $b$.

Назовём отрезок $ab$ осью многообразия $G_n$.

Будем называть длиной оси $ab$ расстояние между $a$ и $b$.

Теорема. *$G_n$ при предыдущих условиях имеет не менее $n+1$ осей, причём, если длины двух осей совпадают, то имеется континуум осей равной длины.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $f$ пары точек $(a, b)$ на $G_n$ — именно расстояние между этими точками в пространстве $E_m$.

Обозначим по предыдущему через $P_{2n}$ пространство всех пар точек на $G_n$ (с идентификацией всех пар слившихся точек). В пространстве $P_{2n}$ существуют множества, псевдокатегория которых равна $1, 2, \ldots, n+1$. Рассмотрим замкнутые топологические классы $[A_1], [A_2], \ldots, [A_{n+1}]$ всех множеств, псевдокатегория которых соответственно $\geqslant 1, 2, \ldots, n$. Рассмотрим максимум минимумов $f$ на множествах класса $[A_j]$ и, обозначив его через $c_j$ $(j=1, 2, \ldots, n+1)$, имеем:

$$c_1 \geqslant c_2 \geqslant \ldots \geqslant c_{n+1}.$$

При этом $c_{n+1} > 0$, потому что можно указать на $G_n$ замкнутое множество пар точек псевдокатегории $n+1$ и такое, что расстояние между точками каждой пары больше нуля. В самом деле, отобразим $G_n$ на сферическое $n$-мерное многообразие $S_n$ и выберем на $S_n$ проективное пространство $R_n$ пар диаметрально противоположных точек. Обозначим через $T_n$ совокупность пар точек на $G_n$, в которую перейдёт $R_n$ при отображении $S_n$ на $G_n$. Очевидно, $T_n$ обладает требуемыми свойствами.

Из принципа стационарной точки следует, что на $G_n$ существуют пары точек $(k_1, l_1), (k_2, l_2), \ldots, (k_{n+1}, l_{n+1})$, в которых полный дифференциал расстояния $\rho(k, l)$ обращается в нуль и расстояния между которыми равны соответственно:

$$\rho(k_i, l_i) = c_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Если бы два из чисел $c_i$ и $c_{i+p}$ совпали, то повторением рассуждения § 4 докажем, что на $G_n$ существовал бы континуум псевдокатегории $\geqslant p+1$ пар точек $(k, l)$ таких, что для каждой пары $\rho(k, l) = c_i$, $d\rho(k, l) = 0$. Для случая поверхности жанра 0 длины осей естественно определять как «длину», «ширину» и «толщину» поверхности. Для эллипсоида эти оси совпадают с осями в обычном смысле.

## ЧАСТЬ II

## Вариационные задачи

### Предварительные замечания

После того как даны топологические методы обнаруживания решения экстремальной задачи и числа таких решений для функции, определённой на многообразии, естественно обобщить эти результаты на случай функциональный. Это обобщение следует проводить, конечно, с большой осторожностью, и мы ограничимся пока отдельными задачами. Впрочем, методы, развиваемые нами, могут дать читателю представление о более общих задачах.

Мы будем рассматривать только задачи об экстремумах интегралов положительных функций, определённых для некоторых семейств кривых, в частности — задачи о геодезических линиях. Мы определим понятие категории для семейств линий. То обстоятельство, что на поверхности рода 0 можно построить семейство категории 4 самонепересекающихся замкнутых линий, обеспечивает существование 4 решений соответственных вариационных задач (например, задач о замкнутой геодезической). Одно из решений — тривиальное: изолированную точку можно рассматривать как замкнутую экстремаль. Три других — дают 3 замкнутые экстремали (например, 3 замкнутые геодезические).

В дальнейшем мы будем рассматривать трижды дифференцируемую поверхность $S$ рода 0. Обозначим через $L$ абстрактное пространство, элементом которого является всякая замкнутая спрямляемая линия на $S$ (т. е. в одну сторону непрерывный образ единичной окружности). Расстояние между двумя элементами $p$ и $q$ из $L$ определяется в смысле Фреше: на кривых $p$ и $q$ вводятся циклические параметры с общим периодом, т. е. устанавливаются некоторые непрерывные отображения единичной окружности на $p$ и $q$, рассматривается максимум расстояний между парами точек с общими значениями циклических параметров; расстоянием в смысле Фреше между кривыми $p$ и $q$ называют нижнюю грань этих максимумов при всевозможных таких параметризациях кривых $p$ и $q$; это расстояние мы будем обозначать символом $\rho_L(p, q)$.

Изолированную точку $a$ следует рассматривать как кривую, т. е. элемент $L$ (ибо она есть также непрерывный образ окружности). Назовём её нуль-кривой или нуль-элементом $L$, любое множество в $L$ нуль-элементов — нуль-множеством.

В дальнейшем будет удобно идентифицировать все нуль-элементы пространства $L$. Будем обозначать через $L^*$ пространство $L$ с идентифицированными нуль-элементами.

Понятие деформации логически весьма просто обобщается на любое абстрактное пространство, в частности на $L$. Мы дадим в следующем параграфе определение специализированной деформации в $L$, требуя задания закона изменения не только кривой — элемента $L$, но и каждой точки на этой кривой.

Переход от вариационных задач в $n$-мерном пространстве (исследование критических точек) к вариационным задачам в собственном смысле для функционалов в более общих пространствах несёт с собой совершенно определённые трудности уже в доказательстве существования абсолютного минимума. Эти трудности сохраняются и при исследовании «критических точек» неминимального типа. Поэтому доказательство аналога принципа критической точки для функционалов $J$, заданных на $L$, занимает довольно много места в настоящей работе. Роль критических точек в $L$ играют замкнутые экстремали, в частности, если функционал $J(q)$ означает длину кривой $q$ из $L$, — замкнутые геодезические. Аналог принципа критической точки должен в этом случае звучать так (отвлекаясь от некоторых тонкостей): дан гомотопический класс $(M)$ множеств $M$ в $L$ и пусть $c$ есть нижняя граница максимумов $J$ на множествах класса $(M)$; тогда «гиперповерхность» $J = c$ должна содержать «критический элемент», т. е. должна существовать экстремаль, для которой $J = c$; в частности, если $J(q)$ есть длина кривой $q$, — замкнутая геодезическая длины $c$.

План доказательства теоремы о трёх геодезических следующий: обнаруживаются в $L$ множества разных категорий (2, 3, 4) и строятся гомотопические классы из множеств соответственных категорий. Обозначаются через $c_i$ нижние границы максимумов $J$ на множествах соответственных классов категории $i+1$ и, в силу анализа принципа критической точки, доказывается существование замкнутых геодезических длины $c_i$, $i = 1, 2, 3$[1]. В случае слияния двух или трёх из этих длин, появляется, в силу аналога теоремы § 4, одно- или двумерное семейство замкнутых геодезических. Этим и устанавливается в общем случае существование 3 замкнутых геодезических на поверхностях рода 0.

[1]) $c_0 = 0$.

Но, если, например, $c_2 = 2c_1$, могло бы случиться, что замкнутая геодезическая длины $c_2$ есть дважды повторённая замкнутая геодезическая длины $c_1$. Чтобы избежать такой возможности, доказывается существование 3 самонепересекающихся замкнутых геодезических, из которых ни одна не может уже быть дважды или трижды повторённой другой. Это вызывает дополнительные исследования. Приходится в пространстве $L$ замкнутых кривых на $S$ рассматривать подпространство замкнутых самонепересекающихся кривых[1]) и среди всех деформаций множеств из этого подпространства выделять так называемые «специальные деформации», превращающие самонепересекающиеся кривые в самонепересекающиеся. Удаётся уточнить все теоремы существования в смысле существования не просто замкнутых геодезических, а замкнутых самонепересекающихся геодезических. Это вызывает значительное усложнение доказательства аналога принципа критической точки.

Поэтому из педагогических соображений можно при первом чтении статьи опускать дополнительные усложнения доказательств, связанных с самонепересекаемостью геодезических, именно, опустить § 8, 9 и во всём дальнейшем в тексте читать вместо «специальные деформации» просто «деформации» и вместо «самонепересекающаяся геодезическая» просто «геодезическая». Тогда остаётся доказательство существования просто 3 замкнутых геодезических. Опущенные же параграфы дополнят это доказательство до полного доказательства теоремы о существовании 3 самонепересекающихся замкнутых геодезических.

Ещё одно небольшое замечание: единичную сферу $S_2$ можно так гомеоморфно отобразить на трижды дифференцируемую поверхность $S$, чтобы спрямляемые линии перешли в спрямляемые. Поэтому топологическая структура пространства $L$ спрямляемых замкнутых кривых на $S$ не зависит от выбора $S$, и для простоты можно ограничиться рассмотрением случая, когда $S$ совпадает с $S_2$. Особую роль будут играть топологические свойства расположения в $L$ его подмножества $A_3$, составленного из всех окружностей на сфере $S_2$; при отображении $S_2$ на $S$ это подмножество перейдёт в некоторое семейство замкнутых спрямляемых кривых, которое мы попрежнему будем обозначать $A_3$ и называть семейством окружностей.

## § 1. Деформация системы кривых

Определение 1. Пусть дана замкнутая система кривых $(p)$ на поверхности $S$. Назовём эту систему образом замкнутой системы кривых $(r)$, если:

1°. Каждой кривой $r_0$ семейства $(r)$ отвечает некоторая, притом единственная, кривая $p_0$ семейства $(p)$ (будем обозначать: $p_0 = p_0(r_0)$). Это соответствие непрерывно относительно кривых $r_0$.

2°. Каждой точке $a$ кривой $r_0 \subset (r)$ отвечает единственная точка $b$ поверхности $S$, которая лежит на кривой $p_0(r_0)$. Это соответствие непрерывно относительно обеих переменных — кривой $r_0$ и точки $a$ на ней; будем писать: $b = b(a, r_0)$.

---

[1]) Гомеоморфных окружности.

3°. Когда точка $a$ пробегает кривую $r_0$, отвечающая ей точка $b(a, r_0)$ пробегает кривую $p_0(r_0)$.

Примечание 1. Если точка $a_0$ лежит на пересечении кривых $r_0$ и $r_1$ семейства $(r)$, ей могут отвечать две различные точки $b_0(a_0, r_0)$ и $b_1(a_0, r_1)$, лежащие на двух кривых: $p_0(r_0)$ и $p_1(r_1)$. (Эти последние не обязаны пересекаться.)

Примечание 2. Будем рассматривать множество всех элементов $(a, r)$, где $r \in (r)$ и $a \in r$. (Точке пересечения двух кривых, $r_0$ и $r_1$, отвечают два элемента $(a_0, r_0)$ и $(a_0, r_1)$.) Образуем абстрактное метрическое пространство из элементов $(a_0, r_0)$, называя расстоянием между двумя элементами $(a_0, r_0)$ и $(a_1, r_1)$ следующее число: $\rho_s(a_0, a_1) + \rho_L(r_0, r_1)$ (сумма расстояний между точками $a_0$ и $a_1$ на $S$ и между кривыми $r_0$ и $r_1$ в $L$).

Образуем также метрическое пространство из элементов $(b_0, p_0)$.

Условие 2° утверждает, что второе из этих абстрактных пространств есть непрерывный образ первого.

Определение 2. Теперь определим понятие деформации для семейства кривых $(p)$. Введём параметр $t$; каждому численному значению параметра $t$, заключённому между $t_0$ и $t_1$, отнесём некоторый образ $(p)_t$ семейства $(p)$, причём $(p)_{t_0} = (p)$. Образ $(p)_t$ будем непрерывно менять вместе с $t$.

Точнее:

1. Каждой точке $a$ кривой $p_0$ семейства $(p)$ и каждому значению параметра $t$ отвечает некоторая точка $b(a, p_0, t)$ поверхности $S$. Эта точка зависит непрерывным образом от трёх переменных: от кривой $p_0$, точки $a$ на ней и параметра $t$.

2. Когда $a$ пробегает $p_0$, соответственная точка $b(a, p_0, t)$ пробегает некоторую кривую $p(p_0, t)$.

3. $b(a, p_0, t_0) = a$.

Совокупность кривых $p(p_0, t)$ есть некоторый образ семейства $(p)$, который мы обозначим через $(p)_t$.

Семейство $(p)_{t_1}$ называется результатом деформации $(p)_{t_0}$, а изменение $(p)_t$ при изменении $t$ от $t_0$ до $t_1$ — деформацией $(p)$.

Если отказаться от требования 3 в определении деформации, т. е. не требовать, чтобы начальное положение $(p)_{t_0}$ совпадало с прообразом $(p)$, то получим несколько более общую операцию, которую назовём деформацией семейства $(p)_{t_0}$ как образа $(p)$ в семейство $(p)_{t_1}$.

Если произвести сначала деформацию $D$ семейства $(p)$ в семейство $(q)$, а далее деформацию $D_1$ семейства $(q)$ как образа $(p)$ в семейство $(r)$, то получим деформацию $D_1 D$ семейства $(p)$ в семейство $(r)$.

В дальнейшем мы будем иметь дело только с семействами самонепересекающихся кривых. Кроме того, мы ограничимся для удобства изложения специальными семействами кривых — «нормальными» семействами и специальными деформациями — «нормальными» деформациями.

Определение 3. Назовём семейство спрямляемых замкнутых кривых $(r)$ нормальным семейством, если, во-первых, это семейство замкнуто; во-вторых, если длина двух дуг $\overset{\smile}{r_1 r_2}$ и $\underset{\frown}{r_1 r_2}$, определённых на кривой $r$ нашего семейства парой её точек $r_1$ и $r_2$, зависит непрерывным образом от кривой $r$ и точек $r_1$ и $r_2$ на ней.

Пример. Всякое замкнутое семейство окружностей на поверхности сферы есть нормальное семейство.

Определение 4. Назовём деформацию нормального семейства $r$ нормальной деформацией, если каждой из двух дуг $\overset{\frown}{r_1 r_2}$, $\overset{\frown}{r_1 r_2}$, определяемых точками $r_1$ и $r_2$ на кривой $r \subset (r)$, и каждому значению параметра $t$ отвечает пара дуг $\overset{\frown}{r_1^t r_2^t}$ и $\overset{\frown}{r_1^t r_2^t}$ соответственной кривой $r_t$, причём длина этих дуг непрерывным образом зависит от кривой $r$, точек $r_1$ и $r_2 \in r$ и параметра $t$.

В результате нормальной деформации нормального семейства получается нормальное же семейство.

Пример нормальной деформации.

Даны на плоскости некоторое замкнутое множество и семейство окружностей радиуса 1, описанных вокруг точек этого семейства. Каждой точке $P_0$ окружности $p_0$ с центром в $A_0$ и каждому значению параметра $t$ $\left(0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}\right)$ отнесём точку $P = P(p_0, P_0, t)$, лежащую на радиусе $A_0P_0$ на расстоянии $1 - t$ от центра. Для значения $t = 0$ мы получаем первоначальное семейство (очевидно, нормальное). При $t = \frac{1}{2}$ оно деформируется в другое нормальное семейство — семейство окружностей вдвое меньшего радиуса. Если бы мы продолжали деформацию до значения параметра $t = 1$, мы преобразовали бы каждую окружность нашего семейства в отдельную точку.

## § 2. Категория семейств кривых

Сформулируем понятие категории для семейств кривых на поверхности рода 0; оно является обобщением понятия категории на функциональное пространство.

Определение. Будем называть нормальное семейство линий на поверхности $S$ семейством категории 1 в $L$, если оно сводимо путём нормальной деформации к нуль-множеству (или, что то же самое — к нулевому элементу функционального пространства $L^*$)[1]).

Нормальное семейство $A$ называется семейством категории $k$ в $L$, если оно может быть разбито на $k$ семейств категории 1 и не может быть разбито на меньшее число таких семейств. Будем обозначать: $\operatorname{cat}_L A = k$.

Пример 1. Нормальное семейство, не покрывающее поверхности $S$, обладает категорией 1 в $L$. В самом деле, всякая часть поверхности сводима к точке. Следовательно, часть поверхности, покрытая нашим семейством, сводима вместе с ним к точке.

Пример 2. Будем называть семейство кривых семейством, $l$ раз покрывающим поверхность, если через каждые $l$ точек поверхности проходит хоть одна кривая семейства.

Лемма. *Замкнутое семейство, покрывающее поверхность не более чем $k$ раз, имеет категорию в $L$ не более $k+1$.*

---

[1]) Точнее, следовало бы говорить о категории в пространстве $L$ с идентифицированными нуль-элементами, т. е. в $L^*$.

В самом деле, пусть $A$ есть такое семейство. Можно указать группу из $k+1$ точек $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ нашей поверхности, через которые не проходит ни одна кривая семейства. Расстояние любой кривой семейства от совокупности точек $(a_1, a_2, \ldots, a_{k+1})$ не равно нулю, и нижняя грань $\varepsilon$ этих расстояний отлична от нуля (мы предполагаем наше семейство замкнутым). Обозначим через $A_i$ совокупность кривых, расстояние которых от точки $a_i$ не меньше, чем $\varepsilon$. Всякая кривая входит хотя бы в одно из $A_i$, так как в противоположном случае расстояние этой кривой от совокупности $(a_1, a_2, \ldots, a_{k+1})$ было бы меньше $\varepsilon$.

Имеем:

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_{k+1}; \quad \operatorname{cat}_L A_i = 1,$$

что доказывает наше предложение.

Пример 3. Будем впредь обозначать через $h$ такое положительное число, зависящее от поверхности $S$, что всякая геодезическая дуга длины, меньше $h$, есть дуга минимального типа (т. е. дуга наименьшей длины среди всех дуг поверхности $S$, соединяющих её концы). На поверхности сферы, например, $h$ равно половине длины большого круга.

Пусть дано нормальное семейство линий, по длине меньших, чем $\frac{h}{2}$. Его категория в $L$ равна 1.

В самом деле, диаметры кривых этого семейства меньше $\frac{h}{2}$, вокруг каждой кривой семейства можно описать геодезическую окружность наименьшего геодезического радиуса, и притом единственную (радиус этой окружности тоже меньше $\frac{h}{2}$ и диаметр её меньше $h$).

Центр этих окружностей изменяется непрерывно вместе с кривыми.

Определим сейчас следующую деформацию нашего семейства: $t$ есть параметр деформации; для каждого момента $t$ каждая кривая переходит в подобную ей кривую с центром подобия в центре соответственной, минимальной описанной окружности и с коэффициентом подобия, равным $1-t$; для значения параметра $t=1$ наше семейство перейдёт в нуль-множество — в совокупность центров описанных окружностей.

Примечание. Аналогичная деформация нам будет нужна впоследствии. Дано некоторое семейство. Мы определим деформацию, которая уменьшит по крайней мере вдвое длины всех кривых семейств, по диаметру не превосходящих $\frac{h}{4}$. Для этого, как в предыдущем примере, подвергнем для значения параметра деформации $t$ каждую кривую, по диаметру меньшую $\frac{h}{2}$, преобразованию подобия с центром подобия в центре описанной окружности и коэффициентом подобия, равным

$$1 - t\left(\frac{h-2d}{h}\right);$$

здесь $d$ — диаметр соответственной кривой.

Для значения параметра $t=1$ длина всех кривых с диаметром меньшим $\frac{h}{4}$ уменьшается по крайней мере вдвое.

Все кривые с диаметром, превосходящим $\frac{h}{2}$, мы оставляем без изменения. Получаем деформацию нужного нам типа.

Пример 4. Семейства, не сводимые к нуль-множеству, были впервые обнаружены Birkhoff'ом, именно: семейство всех параллельных между собой окружностей, покрывающих сферу. Это семейство образует некоторую плёнку на поверхности сферы. При деформации оно перейдёт в семейство, обладающее тем же свойством. По нашей терминологии это семейство будет обладать категорией 2.

Другим примером семейства категории 2, аналогичным данному, является семейство всех больших кругов на поверхности сферы с общим диаметром.

В следующем параграфе мы построим нормальное семейство самонепересекающихся линий категории 4 и, кроме того, для каждой точки поверхности — семейство категории 3 самонепересекающихся кривых, проходящих через эту точку.

В конце статьи мы покажем, что не существует семейства самонепересекающихся кривых категории выше 4.

Точно так же не существует семейства таких кривых, категории выше 3, проходящих через одну точку.

## § 3. Семейства окружностей на сфере

Мы построим такие семейства на сфере $S_2$ радиуса 1. Деформируя такую сферу в произвольную поверхность жанра 0, получим семейства соответственных категорий на последней.

Рассмотрим на сфере $S_2$ семейства:

1°. Семейство $A_1$ всех больших кругов с общим диаметром, или семейство $A_1'$ всех кругов, параллельных между собой. (Как мы увидим, это семейство имеет категорию 2 в $L$.)

2°. Семейство $A_2$ всех больших кругов (или семейство $A_2'$ всех окружностей, проходящих через данную точку сферы).

(Мы докажем, что эти семейства имеют категорию 3 в $L$.)

3°. Семейство $A_3$ всех окружностей на сфере (относительно которого будет доказано, что его категория в $L$ равна 4).

Для доказательства обратим внимание, что $A_3$, рассматриваемое как абстрактное пространство, представляет собой проективное трёхмерное пространство.

В самом деле, такое пространство мы получим, беря шар $S_3$ (внутренность и границу) и идентифицируя пары диаметрально противоположных точек границы.

Отнесём всякой окружности радиуса меньше 1 на сфере $S_2$ точку внутри сферы, именно конец вектора, направленного из центра сферы к центру окружности (перпендикулярно к её плоскости) длины, равной длине радиуса окружности, и с началом в центре сферы. Всем сведшимся к точке окружностям отвечает при этом центр сферы. Большим же кругам мы отнесём пару точек, а именно концы диаметра, перпендикулярного к плоскости круга. Эти пары точек идентифицируем. Получим проективное трёхмерное пространство, на которое взаимно однозначно отображено семейство $A_3$. Легко заметить, что это отображение будет взаимно непрерывным.

Заметим, что множество прямых, проходящих в пространстве через некоторую точку, можно рассматривать как проективную плоскость. Каждому большому кругу отнесём прямую, проходящую через центр сферы, перпендикулярно к плоскости этого круга. Итак, семейство $A_2$ в самом деле представляет собой проективную плоскость.

Легко убедиться также, что семейство $A_1$ есть расположенная в ней проективная прямая.

Мы доказали в § 7 гл. I, что категория проективного пространства $P_n$ относительно себя равна $n+1$: $\operatorname{cat}_{P_n} P_n = n+1$. Поскольку множества $A_1$, $A_2$, $A_3$ из $L$ суть проективные пространства размерностей соответственно 1, 2, 3, то

$$\operatorname{cat}_{A_1} A_1 = 2, \quad \operatorname{cat}_{A_2} A_2 = 3, \quad \operatorname{cat}_{A_3} A_3 = 4.$$

Мы докажем в следующих двух параграфах, что категории множеств $A_1$, $A_2$, $A_3$ в $L$ совпадают с их внутренними категориями:

$$\operatorname{cat}_L A_1 = 2, \quad \operatorname{cat}_L A_2 = 3, \quad \operatorname{cat}_L A_3 = 4.$$

Тем самым будет доказано существование в $L$ множеств первых 4 категорий. Вопрос о существовании в $L$ множеств категории больше 4 остаётся открытым.

## § 4. Категории семейств окружностей

В этом и следующем параграфе $A_1$, $A_2$, $A_3$ фигурируют и как семейства окружностей и как проективные пространства 1, 2, 3-х измерений, им соответствующие.

Определим теперь категории $A_1$, $A_2$, $A_3$ в $L$. Семейства $A_1$, $A_2$, $A_3$ соответственно однократно, двукратно, трёхкратно покрывают сферу. А поэтому (см. пример 2, § 2, гл. II)

$$\operatorname{cat}_L A_1 \leqslant 2, \ \operatorname{cat}_L A_2 \leqslant 3, \ \operatorname{cat}_L A_3 \leqslant 4. \tag{1}$$

Ниже будут доказаны обратные неравенства.

Теорема 1. $\operatorname{cat}_L A_1 = 2$.

Нужно доказать, что $\operatorname{cat}_L A_1 > 1$, т. е. что $A_1$ несводимо к нуль-множеству.

Рассмотрим двумерное многообразие $W_2$, элементами которого являются точки $a_p$ окружностей $p$ из $A_1$, с метрикой $\rho_{W_2}(a_p, a_q) = \rho_{S_2}(a_p, a_q) + \rho_L(p, q)$ (см. § 1)[1]. То, что семейство $A_1$ покрывает сферу $S_2$, означает, что $W_2$ покрывает $S_2$; при этом степень покрытия (по модулю 2) равна 1. Каждой деформации семейства $A_1$ отвечает некоторое гомотопное преобразование нашего покрытия сферы $S_2$ многообразием $W_2$, не меняющее степени покрытия.

Пусть $\operatorname{cat}_L A_1 = 1$, т. е. существует деформация $\vartheta$, преобразующая однопараметрическое семейство $A_1$ в нуль-множество $r$; $r$ представляет собой однопараметрическое множество точек, т. е. обычную кривую на $S_2$, поэтому $r$ не покрывает $S_2$[2]. Деформации $\vartheta$ отвечает гомотопическое преобразование покрытия

[1] $W_2$ гомеоморфно «бутылке Клейна».

[2] Если бы кривая $r$ выродилась бы в кривую Пеано, заполняющую $S_2$, то дальнейшей деформацией её можно было бы превратить в кривую, не заполняющую $S_2$, например, в полигон.

сферы $S_2$ многообразием $W_2$, в результате которого степень покрытия стала бы равной нулю (так как образ $W_2$ перестал бы покрывать всю сферу), но так как степень покрытия, равная раньше 1, не могла измениться, то мы приходим к противоречию, доказывающему теорему.

Теорема 2. $\operatorname{cat}_L A_2 = 3$, $\operatorname{cat}_L A_3 = 4$.

Докажем для этого неравенства, противоположные неравенствам (1). Пусть $A$ есть замкнутое подмножество в $A_2$ (соответственно в $A_3$). $A$ есть подмножество проективной плоскости $A_2$ (пространства $A_3$), и мы можем рассматривать категорию $A$ в $A_2$ (соответственно в $A_3$), которые будем обозначать $\operatorname{cat}_{A_2} A$ ($\operatorname{cat}_{A_3} A$).

Мы докажем лемму:

Лемма 1. *Если* $\operatorname{cat}_{A_2} A > 1$ ($\operatorname{cat}_{A_3} A > 1$), *то и* $\operatorname{cat}_L A > 1$.

Из леммы 1 вытекает сразу неравенство

$$\operatorname{cat}_L A_2 \geqslant 3, \ \operatorname{cat}_L A_3 \geqslant 4. \tag{2}$$

В самом деле, если $\operatorname{cat}_L A_2 < 3$, то $A_2 = A_2^1 + A_2^2$, где $\operatorname{cat}_L A_2^1 = \operatorname{cat}_L A_2^2 = 1$; тогда, в силу леммы 1, и $\operatorname{cat}_{A_2} A_2^1 = 1$, $\operatorname{cat}_{A_2} A_2^2 = 1$, т. е. $\operatorname{cat}_{A_2} A_2 \leqslant 2$, вопреки равенству $\operatorname{cat}_{A_2} A_2 = 3$; итак, $\operatorname{cat}_L A_2 \geqslant 3$.

Аналогично доказывается $\operatorname{cat}_L A_3 \geqslant 4$; из (1) и (2) вытекает теорема.

Приступим к доказательству леммы 1. Предварительно докажем одно свойство проективных $n$-мерных пространств (имеющее место при $n = 2$ и 3 для $A_2$ и $A_3$).

$n$-мерное проективное пространство $P_n$ представимо в виде $n$-мерной единичной эвклидовой сферы $S_n$ с идентифицированными диаметрально противоположными точками; при этом каждое замкнутое множество $A$ из $P_n$ изображается на $S_n$ в виде центрально симметрического множества $B$; деформации множества $A$ в $P_n$ отвечает центрально симметрическая деформация его образа $B$ в $S_n$ (т. е. деформация, при которой пара диаметрально противоположных точек остаётся таковой же) и обратно.

Лемма 2. *Пусть $B$ — образ на $S_n$ замкнутого множества $A$ из $P_n$. Если* $\operatorname{cat}_{P_n} A > 1$, *то одна из компонент $B$ содержит пару диаметрально противоположных точек $S_n$.*

Пусть, обратно, ни одна из компонент $B$ не содержит пары диаметрально противоположных точек. Докажем, что $\operatorname{cat}_{P_n} A = 1$.

Возможны три случая:

1) $A$ есть континуум (состоит из одной компоненты), $B$ состоит или из одной симметрической относительно центра компоненты, или из двух симметрических друг другу относительно центра компонент $B_1$ и $B_2$, каждая из которых не содержит пары диаметрально противоположных точек. В этом втором случае можно деформацией $D$ на сфере $S_n$ свести $B_1$ к точке $c$; далее можно распространить деформацию $D$ на множество $B_2$ так, что получится центрально симметрическая деформация всего множества $B_1 + B_2 = B$ в пару диаметрально противоположных точек $c_1$ и $c_2$, а значит в проективном пространстве $P_n$ можно свести $A$ к точке, т. е. $\operatorname{cat}_{P_n} A = 1$.

2) $A$ состоит из конечного числа компонент. В силу предыдущего, каждая из них сводится к точке; $A$ сводится к конечному числу точек, которые в свою очередь сводимы к одной точке, т. е. $\operatorname{cat}_{P_n} A = 1$.

3) В общем случае, любая замкнутая сфера $\overline{S(A, \varepsilon)}$ вокруг множества $A$ состоит из конечного числа компонент; если каждая из компонент $B$ — образа $A$ на $S_n$ — не содержит пары диаметрально противоположных точек, то и каждая из компонент образа $\overline{S(A, \varepsilon)}$ на $S_n$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$ не содержит таких компонент. Но тогда, в силу предыдущего, $\operatorname{cat}_{P_n} \overline{[S, (A, \varepsilon)]} = 1$, тем более $\operatorname{cat}_{P_n} A = 1$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если* $\operatorname{cat}_{P_n} A > 1$, *то существует в* $P_n$ *при любом* $\varepsilon > 0$ *замкнутый полигон* $A_\varepsilon$, *вершины которого принадлежат* $A$, *стороны которого по длине меньше* $\varepsilon$, *причём* $A_\varepsilon$ *есть результат спрямляемой деформации* в $P_n$ *проективной прямой*[1]).

В самом деле, в силу леммы 2, образ $B$ множества $A$ на $S_n$ содержит компоненту $B^1$ с парой диаметрально противоположных точек $b_1$, $b_2$. При любом $\varepsilon > 0$ можно соединить в континууме $B^1$ точки $b_1$ и $b_2$ $\varepsilon$-цепью, т. е. найти в $B^1$ последовательность точек $b^0 = b_1, b^1, \ldots, b^{n-1}, b^n = b_2$, где $\rho(b^i, b^{i+1}) < \varepsilon$; соединив на $S_n$ пары точек $b^i$, $b^{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ дугами длины $< \varepsilon$, получим полигон $B_\varepsilon$ соединяющий в $S_n$ точки $b_1$ и $b_2$, вершины которого лежат в $B$, а стороны по длине меньше $\varepsilon$. Пусть $q$ — любой меридиан (половина большого круга), соединяющий диаметрально противоположные точки $b_1$ и $b_2$. Можно деформировать в $S_n$ меридиан $q$ в $B_\varepsilon$, сохраняя неподвижными концы $b_1$ и $b_2$.

Образом $q$ в $P_n$ является проективная прямая $p$, а образом $B_\varepsilon$ — замкнутый полигон $A_\varepsilon$ (так как концам $b_1$ и $b_2$ отвечает одна точка); очевидно, $A_\varepsilon$ удовлетворяет всем условиям леммы.

Перейдём к доказательству леммы 1.

Пусть $A$ — замкнутое подмножество $A_2$ (или $A_3$) и $\operatorname{cat}_{A_2} A > 1$ ($\operatorname{cat}_{A_3} A > 1$). Допустим, вопреки предположению, что $\operatorname{cat}_L A = 1$.

В силу леммы 3, существует для любого $\varepsilon > 0$ в $A_2$ (соответственно $A_3$) полигон $A_\varepsilon$, обладающий перечисленными в формулировке леммы свойствами. $A_\varepsilon$ есть результат спрямляемой деформации в $A_2$ проективной прямой $A_1$.

Следует отличать деформацию проективной прямой $A_1$ как множества в проективной плоскости от деформации $A_1$ как семейства кривых (в смысле определения 2 § 1 гл. II). Если определена деформация $A_1$ в $A_2$ (как множества в проективной плоскости), то известно, в какой элемент $A_2$ переходит любой элемент $p$ из $A_1$ в любой момент $t$ деформации (т. е. в какую окружность переходит окружность $p$); но для определения деформации $A_1$ как семейства кривых в смысле § 1 гл. II нужно ещё дополнительно знать, в какую точку переходит в любой момент $t$ любая точка $a_p$ любой окружности $p$ из $A_1$. Имеет место, однако, лемма, доказательство которой приведём ниже (§ 5).

Лемма 4. *Если дана спрямляемая деформация* $\vartheta$ *проективной прямой* $A_1$ *в проективной плоскости* $A_2$ (*пространства* $A_3$), *переводящая* $A_1$ *в полигон* $A_1^1$, *то существует деформация* $D$ *в смысле определения* § 1, *переводящая* $A_1$ *в* $A_1^1$.

[1]) Полигоном мы называем последовательность точек — вершин полигона, соединённых последовательно спрямляемыми дугами — сторонами полигона. Спрямляемой деформацией кривой называем такую её деформацию, в любой момент которой наша кривая переходит в спрямляемую кривую.

Из леммы 4 следует существование деформации $D$ (в смысле определения § 1 гл. II) семейства окружностей $A_1$ в семейство окружностей $A_\varepsilon$.

Далее, $\mathrm{cat}_L A = 1$, т. е. существует деформация $D_A$, переводящая $A$ в нуль-множество. В этом случае мы построим (в § 5) деформацию $D_1$, переводящую $A_\varepsilon$ также в нуль-множество. Но тогда произведение деформаций $D_1 D$ будет деформация, переводящая $A_1$ в нуль-множество, т. е. $\mathrm{cat}_L A_1 = 1$ (вопреки теореме 1). Полученное противоречие докажет лемму 1, а значит и теорему 2.

## § 5. Доказательство некоторых лемм

**1.** Построение деформации $D_1$. Существует число $\alpha > 0$, обладающее следующим свойством:

Если $a_p$ и $a_q$ — две точки окружностей $p$ и $q$ семейства $A$, где $\rho_L(p, q) < \alpha$ и $\rho(a_p, a_q) < 2\alpha$, то в любой момент деформации $D_A$ образы точек $a_p$ и $a_q$ удалены друг от друга на расстояние меньше $\frac{h}{4}$. Будем полагать в дальнейшем $0 < \varepsilon < \frac{\alpha}{3}$.

Положим далее, что $\varepsilon$ настолько мало, что для всех окружностей $A$, лежащих в $\varepsilon$ — окрестности данной, можно выбрать одновременно непрерывным образом циклический параметр так, что две точки двух любых окружностей этой окрестности с общим значением параметра удалены друг от друга на расстояние $< 2\varepsilon$.

«Полигон» $A_\varepsilon$ есть однопараметрическое семейство окружностей $q_\tau$, где $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ и $q_0 = q_1$. Пусть вершины полигона отвечают значениям $\tau = \frac{i}{n}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1, n$.

«Сторона» $A_\varepsilon^i$ полигона $A_\varepsilon$ с вершинами $q_{\frac{i}{n}}$ и $q_{\frac{i+1}{n}}$ есть однопараметрическое семейство окружностей $q_\tau$, $\frac{i}{n} \leqslant \tau \leqslant \frac{i+1}{n}$; окружности этого семейства удалены друг от друга на расстояние $< \varepsilon$; выберем на всех окружностях $q_\tau$ «стороны» $A_\varepsilon^i$ значения циклического параметра $\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, причём, если $a(\varphi, \tau)$ — точка окружности $q_\tau$, отвечающая значению параметра $\varphi$, то $\rho[a(\varphi, \tau), a(\varphi, \tau_1)] < 2\varepsilon$, если $q_\tau$ и $q_{\tau_1}$ принадлежат нашей стороне.

Обозначим через $b(\varphi, \tau)$ точку, лежащую на минимальной геодезической дуге, соединяющей точки $a\left(\varphi, \frac{i}{n}\right)$ и $a\left(\varphi, \frac{i+1}{n}\right)$, и делящую эту дугу на две части, длины которых относятся, как $\left(\tau - \frac{i}{n}\right) : \left(\frac{i+1}{n} - \tau\right)$; очевидно,

$$b\left(\varphi, \frac{i}{n}\right) = a\left(\varphi, \frac{i}{n}\right) \text{ и } b\left(\varphi, \frac{i+1}{n}\right) = a\left(\varphi, \frac{i+1}{n}\right). \tag{3}$$

Соединим каждую точку

$$a(\varphi, \tau), \; 0 \leqslant \varphi \leqslant 1, \; \frac{i}{n} \leqslant \tau \leqslant \frac{i+1}{n}$$

с соответственной точкой $b(\varphi, \tau)$ минимальной геодезической дугой. Расстояния между такими парами точек меньше $3\varepsilon < \alpha < \frac{h}{4}$; точки $a(\varphi, \tau)$, $b(\varphi, \tau)$ и соединяющие их минимальные дуги непрерывно зависят от $\varphi$ и $\tau$; двигая каждую точку $a(\varphi, \tau)$ по соответственной дуге до соответственной точки $b(\varphi, \tau)$ со скоростью, пропорциональной длине соответственной дуги, получим непрерывную деформацию всего нашего семейства окружностей «стороны» $A_\varepsilon^i$ «полигона» $A_\varepsilon$ в некоторое множество из $L$ — семейство кривых $\overline{A}_\varepsilon^i$.

В силу (3), точки окружностей $q_{\frac{i}{n}}$ и $q_{\frac{i+1}{n}}$ не меняются при нашей деформации. Обозначим через $q'_\tau$ элемент $\overline{A}^i_\varepsilon$ — именно результат деформации окружности $q_\tau$. Имеем: $q'_{\frac{i}{n}} = q_{\frac{i}{n}}$, $q'_{\frac{i+1}{n}} = q_{\frac{i+1}{n}}$. Аналогично деформируем все другие стороны $A^k_\varepsilon$ полигона $A_\varepsilon$. Так как вершины полигона $A_\varepsilon$ остаются неподвижными, то получаем деформацию $D'_1$ полигона $A_\varepsilon$ в некоторое семейство кривых $\overline{A}_\varepsilon = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \overline{A}^i_\varepsilon$.

Определим теперь новую деформацию $D''_1$ семейства $\overline{A}_\varepsilon$ в нуль-множество. Деформация $D_A$, переводящая $A$ в нуль-множество, определена для кривых $q_{\frac{i}{n}} = q'_{\frac{i}{n}}$ (вершин полигона). Пусть точки $a\left(\varphi, \frac{i}{n}\right)$, $a\left(\varphi, \frac{i+1}{n}\right)$ окружностей $q_{\frac{i}{n}}$ и $q_{\frac{i+1}{n}}$ переходят в момент $t$ деформации $D_A$ в точки $c\left(\varphi, \frac{i}{n}, t\right)$, $c\left(\varphi, \frac{i+1}{n}, t\right)$. Имеем: при $t=0$

$$c\left(\varphi, \frac{i}{n}, 0\right) = a\left(\varphi, \frac{i}{n}\right);\ c\left(\varphi, \frac{i+1}{n}, 0\right) = a\left(\varphi, \frac{i+1}{n}\right),$$

при $t=1$, в конечный момент деформации $D_A$, кривые $q_{\frac{i}{n}}$ и $q_{\frac{i+1}{n}}$ переходят в точки $c_{\frac{i}{n}}$ и $c_{\frac{i+1}{n}}$, т. е. $c\left(\varphi, \frac{i}{n}, 1\right) = c_{\frac{i}{n}}$, $c\left(\varphi, \frac{i+1}{n}, 1\right) = c_{\frac{i+1}{n}}$ при любом $\varphi$. Так как $\rho\left[a\left(\varphi, \frac{i}{n}\right), a\left(\varphi, \frac{i+1}{n}\right)\right] < \alpha$, то, по определению $\alpha$ (см. начало настоящего параграфа), $\rho\left[c\left(\varphi, \frac{i}{n}, t\right), c\left(\varphi, \frac{i+1}{n}, t\right)\right] < \frac{h}{4}$. Соединим все пары точек $c\left(\varphi, \frac{i}{n}, t\right)$, $c\left(\varphi, \frac{i+1}{n}, t\right)$ минимальными геодезическими дугами; эти дуги непрерывно зависят от своих концов $\left(\text{так как их длины меньше } \frac{h}{4}\right)$, а значит от $\varphi$ и $t$. Обозначим через $c(\varphi, \tau, t)$, где $\frac{i}{n} \leqslant \tau \leqslant \frac{i+1}{n}$, точку минимальной дуги, соединяющей $c\left(\varphi, \frac{i}{n}; t\right)$ и $c\left(\varphi, \frac{i+1}{n}, t\right)$, делящую эту дугу по длине в отношении $\left(\tau - \frac{i}{n}\right) : \left(\frac{i+1}{n} - \tau\right)$. Очевидно, $c(\varphi, \tau, 0) = b(\varphi, \tau)$. Точка $c(\varphi, \tau, t)$ непрерывно зависит от $\varphi, \tau, t$. Определим теперь деформацию $D''_1$ семейства кривых $\overline{q}'_\tau$, $\frac{i}{n} \leqslant \tau \leqslant \frac{i+1}{n}$, так что точка $b(\varphi, \tau)$ кривой $\overline{q}'_\tau$ в момент $t$ деформации $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ переходит в точку $c(\varphi, \tau, t)$. В момент $t=1$, $c(\varphi, \tau, 1)$, при любом $\varphi$, равна точке $c_\tau$ минимальной дуги, соединяющей точки $c_{\frac{i}{n}}$, $c_{\frac{i+1}{n}}$, делящей эту дугу по длине на части в отношении $\left(\tau - \frac{i}{n}\right) : \left(\frac{i+1}{n} - \tau\right)$. Итак, кривая $q_\tau$ перешла в точку $c_\tau$ и всё семейство $\overline{A}^i_\varepsilon$ кривых $\overline{q}'_\tau$ — в нуль-множество. Аналогичные деформации можно определить для всех других семейств $\overline{A}^j_\varepsilon$, $j=0, 1, \ldots, n-1$, из $\overline{A}_\varepsilon$. Получим деформацию $D''_1$ семейства $A_\varepsilon$, переводящую это семейство в нуль-множество.

Произведение $D''_1 D'_1$ есть деформация $D_1$, переводящая $A_\varepsilon$ в нуль-множество.

**2.** Доказательство леммы 4 (построение деформации $D$).

Пусть дана спрямляемая деформация в проективной плоскости $A_2$, переводящая проективную прямую $A_1$ в спрямляемую кривую $A_1^1$. Другими словами, задана функция $m(p, t)$, относящая каждой окружности $p$ из $A_1$ и значению $t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, окружность $m(p, t)$, где $m(p, t)$ непрерывно зависит от $p$ и $t$.

Совокупность элементов $m(p, t)$ при фиксированном $t$ образует кривую $A_1^t$, где $A_1^0 = A_1$, причём кривая $A_1^t$ не заполняет проективной плоскости $A_2$, т. е. существует элемент $q^t$ из $A_2$, не входящий в $A_1^t$. Требуется построить функцию $n(a_p, p, t)$, относящую каждой точке $a_p$ каждой окружности $p$ из $A_1$ и каждому значению $t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, точку $n(a_p, p, t)$, непрерывно зависящую от $a_p$, $p$ и $t$, так что когда $a_p$ пробегает окружность $p$, то $n(a_p, p, t)$ пробегает окружность $m(p, t)$; тем самым деформация $\vartheta$ превратится в деформацию $D$ семейства $A_1$ в семейство $A_1^t$ в смысле определения 2 § 1 гл. II.

Можно ограничиться далее случаем, когда существует в $A_2$ элемент $q$, не входящий ни в одну кривую $A_1^t$. В самом деле, для каждого $t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, существует элемент $q^t$, не входящий в спрямляемую кривую $A_1^t$; $q^t$ не входит и во все $A_1^{t'}$, где $|t' - t| < \varepsilon$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Можно разбить промежуток $[0,1]$ на такие промежутки $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где $t_1 = 0$, $t_{n+1} = 1$, что все кривые $A_1^t$ при $t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}$ не проходят через заданный элемент $q^{t_i}$. Деформация $\vartheta$ распадается на $n$ последовательных деформаций $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_i, \ldots, \vartheta_n$, отвечающих промежуткам $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, параметра деформации $t$, причём все изменяющиеся при деформации $\vartheta_i$ кривые $A_1^t$ не проходят через элемент $q^{t_i}$ из $A_2$, и достаточно провести искомое построение для каждой деформации $\vartheta_i$, чтобы получить его для итоговой деформации $\vartheta = \vartheta_n \vartheta_{n-1} \ldots \vartheta_1$.

Итак, положим, что в $A_2$ существует элемент $q$ такой, что все кривые $A_1^t$ не проходят через $q$. $q$ представляет собой большой круг, точно так же, как и все элементы $m(p, t)$ «кривых» $A_1^t$; так как каждая окружность $m(p, t)$ отлична от $q$, то плоскость круга $m(p, t)$ пересекает плоскость круга $q$ по некоторому диаметру, который назовём начальным для $m(p, t)$, причём начальный диаметр для $m(p, t)$ непрерывно зависит от $p$ и $t$. Пусть $a_p^0$ — точка окружности $p$ из $A_1$ — один из концов его начального диаметра; тогда $n(a_p^0, p, t)$ определим как конец начального диаметра окружности $m(p, t)$, причём, если мы потребуем, чтобы $n(a_p^0, p, t)$ было непрерывно по $t$, то тем самым однозначно определится выбор одного из двух концов начального диаметра окружностей $m(p, t)$ для всех $t$ (при данном $p$). Определим теперь на $p$ положительный порядок обхода. Он непрерывным образом определится и для всех близких к $p$ окружностей из $A_2$, в частности, для всех $m(p, t)$ при достаточно малых $t$. Продолжая непрерывным образом по $t$ выбор положительного порядка, мы определим его для всех $m(p, t)$ при фиксированном $p$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$. Пусть $a_p = a_p^\varphi$ есть точка окружности $p$, которая получается движением от точки $a_p^0$ по $p$ в положительном направлении на дугу $\varphi$ $(a_p^{2\pi} = a_p^0)$; определим $n(a_p, p, t) = n(a_p^\varphi, p, t)$ как точку окружности $m(p, t)$, получаемую движением по ней от точки $n(a_p^0, p, t)$ на дугу $\varphi$. Функция $n(a_p, p, t)$ непрерывным образом зависит от точки $a_p$ на окружности $p$ из $A_1$, окружности $p$ и $t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Эта функция определяет деформацию $D$ в смысле § 1, переводящую $A_1$ в $A_1^1$.

Аналогично обстоит дело в пространственном случае — деформации $\vartheta$ в $A_3$ проективной прямой $A_1$ в кривую $A_1^1$. Сохраним все предыдущие обозначения. Пусть $\theta$ — элемент $A_3$, отвечающий всем нуль-окружностям. Совокупность всех параллельных между собой окружностей сферы образует проективную прямую $B$, проходящую через $\theta$, которую будем называть лучом.

Образом $A_1$ в момент $t$ при деформации $\vartheta$ является спрямляемая кривая $A_1^t$ в трёхмерном пространстве $A_3$; мы будем предполагать, что проективная прямая $A_1$ не проходит в трёхмерном пространстве $A_3$ через точку $\theta$. Можно добиться, несколько преобразовав, в случае надобности, деформацию $\vartheta$ прямой $A_1$ в $A_1^1$, чтобы все кривые $A_1^t$, кроме, может быть, $A_1^1$, не проходили через $\theta$. Это мы будем предполагать в дальнейшем. Для каждой спрямляемой кривой $A_1^t$ существует луч $c_t$, с которым $A_1^t$ не имеет общих точек при $t<1$ и самое большее общую точку $\theta$ при $t=1$. Мы ограничимся, как и в плоском случае, доказательством леммы в предположении существования для деформации $\vartheta$ такого луча $c$, с которым все кривые $A_1^t$, при $t<1$, не имеют общих точек, а $A_1^1$ — самое большее имеет общую точку $\theta$ (любая деформация есть произведение конечного числа подобных деформаций).

Вернёмся к рассмотрению $A_3$ как семейства окружностей на $S_2$; «луч» $c$ есть семейство параллельных между собой окружностей $q$; «кривая» $A_1^t$ есть семейство окружностей $m(p, t)$, которые, при $t<1$, все не суть нуль-окружности, причём любая $m(p, t)$, при $t<1$, не является окружностью $q$ семейства $c$, точно так же, как и любая ненулевая окружность $m(p, 1)$ из $A_1^1$. Для каждой окружности $m(p, t)$, при $t<1$, и ненулевой окружности $m(p, 1)$ найдётся окружность $q_c$ из $c$ такая, что центр $m(p, t)$ лежит в плоскости окружности $q_c$, и эта плоскость пересекает круг $m(p, t)$ по одному из его диаметров. Пересечём плоскость $m(p, t)$ с плоскостью этой окружности $q_c$ и полученный в пересечении диаметр будем считать начальным диаметром для $m(p, t)$. Если $a_p^0$ есть конец начального диаметра окружности $p$ из $A_1$, то определим $n(a_p^0, p, t)$ как конец начального диаметра для $m(p, t)$, выбранный так, чтобы $n(a_p^0, p, t)$ было непрерывно по $t$. Далее, если $a_p=a_p^\varphi$ есть точка $p$, полученная движением по $p$ от $a_p^0$ на дугу $\varphi$ в некотором направлении, то, выбирая непрерывным образом направления на $m(p, t)$, отправляясь от $p=m(p, 0)$, мы обозначим через $n(a_p, p, t)$ точку окружности $m(p, t)$, получаемую движением по ней на дугу $\varphi$ от $n(a_p^0, p, t)$. При $t=1$ функция $n(a_p, p, 1)$ определена, если $m(p, 1)$ не есть нуль-элемент. Если же $m(p, 1)$ есть нуль-элемент, т. е. $m(p, 1)$ вырождается в точку $b$, то $n(a_p, p, 1)=b$ при всех $a_p \in p$. Определённая таким образом функция $n(a_p, p, t)$ непрерывна относительно $a_p$, $p$ и $t$ и определяет искомую деформацию $D$.

## § 6. Теоремы о замкнутых геодезических линиях

Сформулируем сейчас предложение, доказательство которого будет дано в следующих параграфах. Методы, с помощью которых оно доказывается, применимы к другим аналогичным предложениям, относящимся к теории самонепересекающихся экстремалей. В формулировках предложений можно писать вместо «геодезическая дуга» — «экстремаль произвольной, позитивно заданной вариационной проблемы». Достаточно ниже при доказательстве заменять также всюду слово «дуга геодезической» словом «дуга экстремали».

Теорема. (Она представляет собой наиболее полное и точное решение проблемы Пуанкаре.) *На всякой замкнутой дифференцируемой поверхности $S$ рода 0 существуют:*

1) *или 3 замкнутые, самонепересекающиеся геодезические кривые различной длины;*

2) *или семейство, покрывающее поверхность, замкнутых самонепересекающихся геодезических равной длины, и одна такая геодезическая отличной длины;*

3) *или семейство, дважды покрывающее поверхность, замкнутых самонепересекающихся геодезических равной длины.*

Случай 2 реализуется на поверхностях вращения, случай 3 — на сфере.

Доказательство теоремы сводится к следующему:

Строятся классы нормальных семейств замкнутых линий $[B_1]$, $[B_2]$, $[B_3]$ категории, соответственно не ниже 2, 3, 4.

Семейство самонепересекающихся кривых будем называть специальным семейством, а деформацию специального семейства в специальное же — специальной деформацией.

Обозначим через $(B_1)$, $(B_2)$, $(B_3)$ классы семейств окружностей на $S$ категории соответственно не меньше 2, 3, 4.

Обозначим через $[B_1]$, $[B_2]$, $[B_3]$ классы всех специальных нормальных семейств самонепересекающихся кривых, получаемых путём деформации на $S_2$ семейств классов $(B_1)$, $(B_2)$, $(B_3)$.

Обозначим через $c_1$, $c_2$, $c_3$ нижние грани максимумов длин кривых (в метрике $S$) семейств соответственно $[B_1]$, $[B_2]$, $[B_3]$. Так как $[B_1]\supset[B_2]\supset[B_3]$, то $c_3 \geqslant c_2 \geqslant c_1$. Выше (пример 3 § 2) было показано, что множество кривых, максимум длин которых меньше $\frac{h}{2}$, сводимо к нуль-множеству. А поэтому максимум длин множества категории $\geqslant 2$ не меньше $\frac{h}{2}$. Отсюда

$$c_1 \geqslant \frac{h}{2} > 0.$$

Мы докажем, что каждому числу $c_i$ $(i=1, 2, 3)$ отвечает одна по крайней мере замкнутая геодезическая без точек самопересечения длины $c_i$ (аналог принципа особой точки). Совпадение двух или трёх из этих чисел даёт континуум решений нашей вариационной задачи (аналог теоремы § 5 гл. I). Для доказательства определим сначала деформацию, переводящую самонепересекающуюся спрямляемую кривую в такую же кривую меньшей длины, если исходная кривая не является замкнутой геодезической.

## § 7. Операция стягивания дуги

Пусть дана в плоскости кривая $p$, замкнутая и спрямляемая, диаметра $d$. Возьмём на $p$ две точки $a_p$ и $b_p$ на расстоянии $c < \frac{d}{4}$; будем считать $c < 1$. Точки $a_p$ и $b_p$ разбивают $p$ на две части, которые мы обозначим через $\smile{a_pb_p}$ и $\underset{\frown}{a_pb_p}$. Пусть длина $\varepsilon$ дуги $\smile{a_pb_p}$ меньше $\frac{1}{4}$ и меньше, чем $\frac{d}{4}$; диаметр $\underset{\frown}{a_pb_p}$ поэтому больше, чем $\frac{3}{4}d$. Соединим $a_p$ и $b_p$ отрезком прямой, который мы обозначим $\overline{a_pb_p}$. Разность между длинами $\smile{a_pb_p}$ и $\overline{a_pb_p}$ обозначим через $\alpha$. Мы имеем: $c=\varepsilon-\alpha$. Построим эллипс $E$ с фокусами в $a_p$ и $b_p$, с большой осью, равной $\varepsilon = c+\alpha$; $\smile{a_pb_p}$ заключена внутри $E$.

Определим деформацию $\vartheta_1$ кривой $p$, при которой:

1) дуга $\underset{\frown}{a_pb_p}$ остаётся инвариантной;

2) $\breve{a_p b_p}$ преобразуется в сегмент прямой $\overline{a_p b_p}$.

Для этой цели приведём в соответствие каждой точке $m \in \breve{a_p b_p}$ (рис. 4), расстояние которой от $a_p$ вдоль дуги $\breve{a_p b_p}$ равно $\rho < \varepsilon$, точку $n$, расстояние которой от $a_p$ вдоль $\overline{a_p b_p}$ равно $\frac{\rho}{\varepsilon} c$.

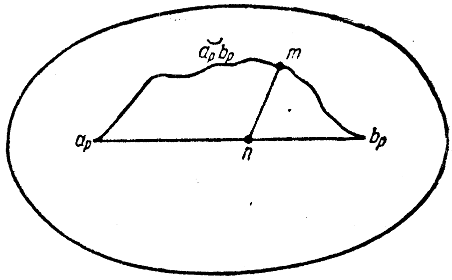


Рис. 4.

Соединим каждую пару соответствующих точек $m$ и $n$ отрезком прямой $\overline{mn}$. Пусть длина $\overline{mn}$ равна $d(m, n)$. Определим теперь трансформированную точку $m(t)$ в момент $t$ следующим образом: $m(t)$ расположена на отрезке $\overline{mn}$ на расстоянии $t \cdot d(m, n)$ от $m$. В момент $t=1$ $\breve{a_p b_p}$ преобразуется в $\overline{a_p b_p}$ и кривая $p$ преобразуется в кривую $p_1$.

Нетрудно видеть, что наибольшее удаление точки кривой $p$ от своего первоначального положения в течение деформации не может сделаться больше чем $\sqrt{a}$.

В самом деле, удалим путём деформаций без растяжения дуги $\breve{a_p b_p}$ точку $m$ на наибольшее из возможных расстояний от точки $n$. Очевидно, это произойдёт тогда, когда дуга $\breve{a_p b_p}$ обратится в ломаную с вершиной в точке $m'$ — новом положении точки $m$. Так как длины дуг не изменились, то отношение отрезков $a_p m'$ и $b_p m'$ равно отношению дуг $\breve{a_p m}$ и $\breve{b_p m}$ (частей $\breve{a_p b_p}$), т. е. отношению отрезков $a_p n$ и $b_p n$. Отсюда заключаем: $m'n$ есть биссектриса угла при $m'$ в треугольнике $a_p m' b_p$ с основанием, равным $\varepsilon - a$ и суммой боковых сторон $\varepsilon$. Вычисляя длину этой биссектрисы, получим для неё всегда значение, меньшее $\sqrt{ca} < \sqrt{a}$.

Итак, в результате нашей операции:

1) дуга $\overline{a_p b_p}$ осталась неизменной;

2) точки $\breve{a_p b_p}$ сдвинулись на расстояние, меньшее $\sqrt{a}$;

3) длина $p$ уменьшилась на $a$.

## § 8. Деформация распрямления

В результате деформации $\vartheta_1$ $p$ могло перейти в самопересекающуюся кривую $p_1$. Нашей задачей является теперь определение деформации кривой $p_1$, переводящей её снова в самонепересекающуюся кривую, меньшую по длине, чем $p$.

Вернёмся к обозначениям предыдущего параграфа. Примем оси эллипса $E$ за прямоугольные оси координат $x, y$. Рассмотрим функцию $f$ комплексного переменного $z = x + iy$, определённую следующим выражением:

$$f(z) = u(x, y) + v(x, y)\, i = \lg \frac{z - \frac{c}{2}}{z + \frac{c}{2}} - \pi i; \tag{1}$$

имеем:

$$f'(z) = \frac{1}{z - \frac{c}{2}} - \frac{1}{z + \frac{c}{2}} = \frac{c}{z^2 - \frac{c^2}{4}}. \tag{2}$$

Линии $v = \text{const}$, $u = \text{const}$ образуют две ортогональные системы: систему дуг кругов, проходящих через точки $a_p$ и $b_p$ $\left(z = \pm \frac{c}{2}\right)$, определённую уравнением $\arg\left(z - \frac{c}{2}\right) - \arg\left(z + \frac{c}{2}\right) = \text{const}$, и другую систему полных кругов, ортогональных к кругам предыдущей системы и определённых уравнением

$$\left|\frac{z - \frac{c}{2}}{z + \frac{c}{2}}\right| = \text{const}.$$

Введём систему криволинейных координат $u$, $v$. Координата $u$ определена в каждой точке единственным образом, координата $v$ циклическая и определена с точностью до $2k\pi$, где $k$ — целое положительное или отрицательное число (рис. 5).

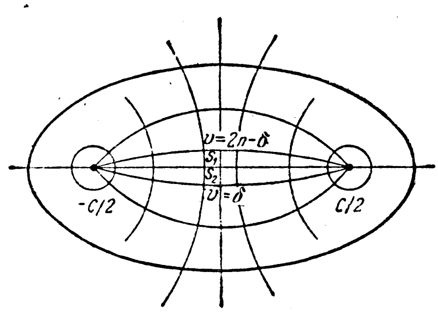


Рис. 5.

Проведём дуги $v = \delta$, $v = 2\pi - \delta$, где $\delta$ — положительное число $< 1$. Эти дуги образуют с осью $v = 0$ два малых сегмента $S_1$ и $S_2$, соприкасающихся вдоль $v = 0$ и заключённых внутри $E$, если $\delta$ достаточно мало. Рассмотрим точку $M$ дуги $\overset{\frown}{a_p b_p}$, лежащую на границе $E$. Подобная точка должна существовать, потому что $\overset{\frown}{a_p b_p}$ имеет точки как внутри, так и вне $E$. Выберем координату $v(M)$ точки $M$ таким образом, чтобы она лежала между 0 и $2\pi$. Она заключена, следовательно, между $\delta$ и $2\pi - \delta$, потому что все точки, для которых $v$ отличается от $2k\pi$ менее чем на $\delta$, лежат внутри $S_1$ и $S_2$ и, следовательно, внутри $E$. Этим выбором координаты $v$ она определилась единственным образом во всякой внутренней точке дуги $\overset{\frown}{a_p b_p}$; в самом деле, значение $v(M_1)$, где $M_1 \in \overset{\frown}{a_p b_p}$, равно

$$v(M) + I\int\left(\frac{1}{z - \frac{c}{2}} - \frac{1}{z + \frac{c}{2}}\right)dz,$$

где интеграл берется по дуге $MM_1$. Следовательно, если мы совершим обход вокруг точек $a_p$ и $b_p$, мы придём со значением $v$, которое отличается от первоначального на $2k\pi$ ($k$ есть разность между числом обходов вокруг $a_p$ и вокруг $b_p$).

Лемма 1. *Всякая точка $M_1$ дуги $\overset{\frown}{a_p b_p}$, лежащая вне $E$, имеет координату $v$, заключённую между $\delta$ и $2\pi - \delta$.*

Доказательство. Будем двигать (рис. 6) точку $M$ вдоль $\overset{\frown}{a_p b_p}$ в направлении к точке $M_1$. Пусть $D_1$ и $D_2$ суть две последовательные точки пересечения дуги $\overset{\frown}{a_p b_p}$ с границей $E$, выбранные таким образом, что дуга $\overset{\frown}{D_1 D_2}$ пересекает сегмент $\overline{a_p b_p}$.

Диаметр подобной дуги превосходит $\frac{\alpha}{2}$. Поэтому существует лишь конечное число подобных дуг на пути $MM_1 \subset \overset{\frown}{a_p b_p}$.

Рассмотрим область, отграниченную от внутренней области $E$ дугой $\overset{\frown}{D_1D_2}$. Эта область может либо содержать обе точки $a_p$ и $b_p$, либо не содержит ни одной. В самом деле, точки $a_p$ и $b_p$ соединимы дугой $\overset{\frown}{a_pb_p}$, лежащей внутри $E$ и не пересекающей границ нашей области: она не может пересекать $\overset{\frown}{D_1D_2}$, потому что $\overset{\frown}{D_1D_2}$ и $\overset{\frown}{a_pb_p}$ являются двумя частями одной и той же самонепересекающейся кривой $p$; она не может пересекать границы $E$ по построению $E$. Следовательно, если мы заставим двигаться точку $M$ вдоль $\overset{\frown}{D_1D_2}$, мы придём в $D_2$ с тем же самым значением $v$, как если бы мы двигались вдоль дуги $D_1D_2$ эллипса $E$, которая не пересекается с $\overline{a_pb_p}$. Заменим все дуги $\overset{\frown}{D_1D_2}$ соответственными дугами эллипса $D_1D_2$. Мы получим новый путь $\overline{MM_1}$, соединяющий точки $M$ и $M_1$ и не пересекающий отрезка $\overline{a_pb_p}$. Интеграл

$$I\int\limits_{M}^{M_1}\left(\frac{1}{z-\frac{c}{2}}-\frac{1}{z+\frac{c}{2}}\right)dz$$

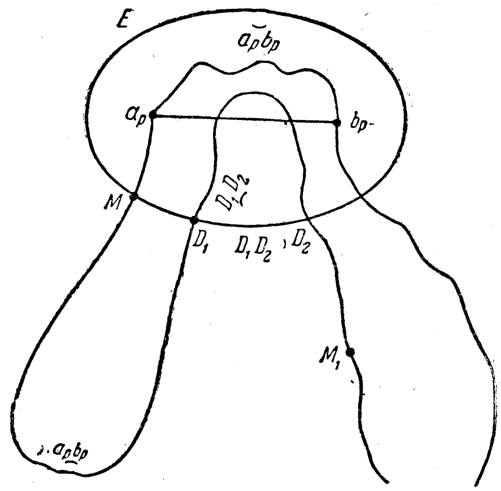


Рис. 6.

имеет равное значение вдоль обоих путей интеграции $\overset{\frown}{MM_1}$ и $\overline{MM_1}$. Следовательно, значение $v$ в точке $M_1$ заключено между 0 и $2\pi$ и, значит, между $\delta$ и $2\pi-\delta$.

Определим теперь деформацию $\vartheta_2$ кривой $p$ следующим образом:

1°. Отрезок $\overline{a_pb_p}$ остаётся при преобразовании $\vartheta_2$ инвариантным.

2°. Всякая внутренная точка $\overset{\frown}{a_pb_p}$ с координатами $(u, v)$ преобразуется в точку с координатами $(u_1, v_1)$, где $u_1=u$, $v_1=v$, если $\delta<v<2\pi-\delta$,

$$\left.\begin{aligned} u_1&=u,\quad v_1=\frac{\delta}{2}\,\frac{3\delta-v}{2\delta-v},\ \text{если } v<\delta,\\ u_1&=u,\quad v_1=2\pi-\delta\,\frac{2\pi-\delta+v}{2v},\ \text{если } v>2\pi-\delta;\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

$u_1$, $v_1$, очевидно, — непрерывные функции от $u$, $v$ в каждой точке, за исключением, быть может, $a_p$ и $b_p$, но $a_p$ и $b_p$ остаются неподвижными, и точки, близкие к $a_p$ и $b_p$, остаются при деформации внутри малых кругов, описанных вокруг этих точек. Следовательно, деформация $\vartheta_2$ непрерывна во всех точках.

Деформация $\vartheta_2$ преобразует все точки $\overset{\frown}{a_pb_p}$ с произвольной координатой $v$ внутрь области $\frac{\delta}{2}\leqslant v_1\leqslant 2\pi-\frac{\delta}{2}$. При этой деформации все точки, координата $v$ которых заключена между $\delta$ и $2\pi-\delta$, остаются неподвижными; например, все точки вне эллипса $E$. Те точки, для которых $v$ меньше $\delta$, преобразуются во внутренние точки $S_1$, те точки, в которых $v$ больше $2\pi-\delta$, преобразуются во внутренние точки $S_2$. Пусть $\vartheta_2$ преобразовала дугу $\overset{\frown}{a_p b_p}$ в $(a_p b_p)'$.

Лемма 2. *Дуга* $(a_p b_p)'$ *не имеет кратных точек.*

Доказательство. В самом деле, $\overset{\frown}{a_p b_p}$ была до деформации самонепересекающейся, т. е. различные точки $\overset{\frown}{a_p b_p}$ имели различные координаты. Две точки с различными координатами преобразуются в точки, имеющие тоже различные координаты: координата $u$ остаётся неизменной, а координата $v_1$ является монотонной функцией от $v$.

Принимая во внимание, что две различные точки преобразованной дуги имеют координаты $v_1$, отличающиеся менее чем на $2\pi$, можем заключить, что точки с различными координатами являются геометрически различными. Дуга $(a_p b_p)'$ не пересекается с сегментом $\overline{a_p b_p}$ (они имеют только общие концы $a_p$ и $b_p$), потому что координата $v$ равна нулю или $2k\pi$ во всякой внутренней точке $\overline{a_p b_p}$. Обозначим через $p_2$ кривую $\overline{a_p b_p}+(a_p b_p)'$. Получаем, следовательно, что кривая $p_2$ не имеет кратных точек.

Лемма 3. *Всякая точка* $p_1$ *удаляется при деформации* $\vartheta_2$ *от своего первоначального положения на расстояние, не превосходящее* $\sqrt{a}$.

Доказательство. В самом деле, пусть точка $(u, v)$ лежит на кругу $u=\text{const}$. Она остаётся на том же кругу при деформации. Но деформация не равна нулю только внутри $E$. Поэтому легко подсчитать, что всякая точка удаляется на расстояние, не большее, чем длина малой оси $\sqrt{4\varepsilon a}<\sqrt{a}$ $\left(\text{ибо } \varepsilon<\frac{1}{4}\right)$.

Лемма 4. *Если* $\delta$ *достаточно мало, длина* $\overset{\frown}{ab}$ *увеличится при деформации* $\vartheta_2$ *на величину, не превосходящую* $\frac{a}{2}$.

Доказательство. Рассмотрим линейный элемент $ds$ кривой $\overset{\frown}{ab}$ с концами $(u, v)$ и $(u+du, v+dv)$. Этот элемент преобразуется в $ds_1$, концы которого определены формулами (3). Линейный элемент в координатах $u$, $v$ имеет выражение

$$ds=\sqrt{(du^2+dv^2)}\times\frac{1}{\left|\frac{c}{z^2-\frac{c^2}{4}}\right|}, \tag{4}$$

где

$$u+iv=\lg\frac{z-\frac{c}{2}}{z+\frac{c}{2}}-\pi i=f(z). \tag{1}$$

В самом деле, $ds=|dz|$, далее (см. (1) и (2)):

$$\sqrt{du^2+dv^2}=|df(z)|=|f'(z)||dz|=\left|\frac{c}{z^2-\frac{c^2}{4}}\right|ds.$$

При деформации $\vartheta_2$ точка $(u, v)$ преобразуется в точку $(u_1, v_1)$, лежащую на круге $u = \text{const}$, на котором

$$\left|\frac{z - \frac{c}{2}}{z + \frac{c}{2}}\right| = \text{const}.$$

Обозначив через $z_1$ комплексную координату (аффикс) точки $(u_1, v_1)$, имеем:

$$\left|\frac{z - \frac{c}{2}}{z + \frac{c}{2}}\right| = \left|\frac{z_1 - \frac{c}{2}}{z_1 + \frac{c}{2}}\right| = \lambda$$

и

$$\left|z^2 - \frac{c^2}{4}\right| = \lambda \left|z + \frac{c}{2}\right|^2 = \frac{\left|z - \frac{c}{2}\right|^2}{\lambda}, \tag{5}$$

следовательно, см. (4) и (5), так как $|du_1| = |du|$, $|dv_1| \leqslant |dv|$,

$$\frac{ds_1}{ds} = \frac{\sqrt{du_1^2 + dv_1^2}}{\sqrt{du^2 + dv^2}} \times \left|\frac{z_1^2 - \frac{c^2}{4}}{z^2 - \frac{c^2}{4}}\right| \leqslant \left|\frac{z_1 - \frac{c}{2}}{z - \frac{c}{2}}\right|^2 = \left|\frac{z_1 + \frac{c}{2}}{z + \frac{c}{2}}\right|^2.$$

Если элемент $ds$ лежит вне областей $S_1$ или $S_2$, имеем $\left|z_1 - \frac{c}{2}\right| < \left|z - \frac{c}{2}\right|$ и $ds_1 < ds$, потому что значение $z - \frac{c}{2}$ внутри $S_1$ и $S_2$ меньше, чем вне этих сегментов. Если $ds$ лежит внутри $S_1$ и $S_2$, $ds_1$ может быть больше, чем $ds$, потому что $ds$ может удалиться от $ab$. Но это удаление меньше, чем $c\frac{\delta}{2}$[1]. Одно из

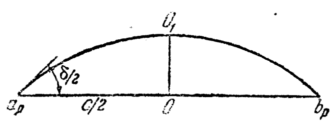


Рис. 7.

чисел $\left|z - \frac{c}{2}\right|$ или $\left|z + \frac{c}{2}\right|$, например $\left|z - \frac{c}{2}\right|$ больше, чем $\frac{c}{2}$; мы поэтому имеем (так как круг $u = \text{const}$ пересекает $\overline{ab}$ ортогонально)

$$\left|z_1 - \frac{c}{2}\right| < \sqrt{\left|z - \frac{c}{2}\right|^2 + \left(\frac{c\delta}{2}\right)^2} < \left|z - \frac{c}{2}\right| \sqrt{1 + \delta^2}$$

и

$$\frac{ds_1}{ds} < 1 + \delta^2,$$

т. е.

$$ds_1 - ds < ds \cdot \delta^2.$$

Общее увеличение всех частей кривой $p_1$, которые были заключены внутри областей $S_1$ и $S_2$ меньше, чем $l\delta^2$, где $l$ — общая длина всей кривой $p$.

Мы можем сделать эту величину меньшей, чем $\frac{a}{2}$ при достаточно малом $\delta$ $\left(\delta < \sqrt{\frac{a}{2l}} < 1\right)$.

Деформация $\vartheta_2$ может быть рассматриваема как непрерывная деформация $p_1$. Достаточно соединить прямолинейными сегментами точки дуги $p_1$ с соответ-

[1]) Самое большое смещение внутри линзы от сегмента $\overline{a_p b_p}$ не превосходит отрезка $00_1$ (см. рис. 7), где $0$ — середина $\overline{a_p b_p}$. Но $00_1 < \frac{1}{2} c \cdot \sin \delta < \frac{c\delta}{2}$.

ствующими им точками $p_2$ и двигать каждую точку из $p_1$ вдоль соответствующего ей сегмента. Все точки, лежащие внутри эллипса $E$, остаются в течение всей деформации внутри последнего.

Обозначим произведение обеих деформаций $\vartheta_1$ и $\vartheta_2$ через $\vartheta$. После деформации $\vartheta$.

1°. Кривая $p$ переходит в кривую $p_2$ без кратных точек.

2°. Длина кривой $p$ уменьшается на величину, не меньшую $\frac{\alpha}{2}$ $\left(\text{при деформации } \vartheta_1 \text{ она уменьшается на величину } \alpha \text{ и при деформации } \vartheta_2 \text{ увеличивается на величину } \leqslant \frac{\alpha}{2}\right)$.

3°. Все точки, лежащие вне $E$, остаются неподвижными, каждая точка внутри $E$ переносится из своего первоначального положения на расстояние, не превосходящее $\sqrt{\alpha}$.

Определённая выше деформация $\vartheta$ применима ко всякой кривой $p$, лежащей в плоскости. Аналогичная операция может быть определена для любой кривой, лежащей на поверхности $S$ с непрерывной и дифференцируемой кривизной. При этом точки $a_p$ и $b_p$ должны быть выбраны таким образом, чтобы дуга $\smile{a_p b_p}$ могла быть заключена внутрь малого геодезического круга $K$, внутри которого геодезическая геометрия совпадает с точностью до малых высшего порядка с геометрией отрезков внутри плоского круга. Вместо обычных отрезков эллипсов, дуг окружностей и т. д. мы будем иметь геодезические дуги, геодезические эллипсы, дуги геодезических окружностей и т. д. Дуга $\smile{a_p b_p}$ должна быть выбрана настолько малой, чтобы она вместе с соответственным геодезическим эллипсом $E$ находилась внутри круга $K$ столь малого, чтобы в нём геодезическая геометрия совпадала (с точностью до малых высших порядков) с обычной плоской геометрией. В силу свойства 3 наши деформации протекают целиком внутри эллипса $E$ — а, значит, и круга $K$ (точки, лежащие вне $E$, остаются неизменными). Поэтому все наши оценки сохранят свою силу, и все результаты этого параграфа сохраняют свою силу для кривых на поверхности $S$. Во всех предыдущих построениях нужно заменять образы плоской геометрии соответственными образами геодезической геометрии на круге $K$, поверхности $S$.

Будем называть операцию $\vartheta$ операцией распрямления кривой.

## § 9. Предыдущие деформации для системы кривых

Пусть задано нормальное специальное семейство кривых $(p)$. Пусть на каждой кривой $p$ системы $(p)$ выбраны непрерывным образом пары точек $a_p$, $b_p$. Мы будем предполагать, что диаметр каждой кривой $p$ больше $d$ и длина каждой дуги $\smile{a_p b_p}$ меньше, чем $\frac{d}{4}$.

Лемма 5. *Если мы применяем к каждой кривой системы $(p)$ деформацию $\vartheta(p)$, мы получаем непрерывную деформацию всей системы кривых $(p)$.*

Доказательство. Будем рассматривать нашу плоскость как плоскость комплексного переменного. Для каждой дуги $\smile{a_p b_p}$ мы построим по правилу, указанному в предыдущем параграфе, непрерывно по $p$, эллипс $E_p$, дугу $\smile{a_p b_p}$, координатную систему $u_p$, $v_p$, где

$$u_p + iv_p = \lg \frac{z - \alpha_p}{z - \beta_p} - \pi i,$$

$\alpha_p$, $\beta_p$ — числа комплексной плоскости, отвечающие точкам $a_p$ и $b_p$, и сегменты $S_1^p$, $S_2^p$. Значение $u_p$ однозначно определено; оно равно логарифму отношения расстояний от данной точки $L$ до точек $a_p$ и $b_p$, $v_p$ определено с точностью до $2k\pi$. Значение $v_p$ для точек кривой $p$ мы определим так же, как в предыдущем параграфе, — вне $E_p$, $0 < v_p < 2\pi$, и в остальных точках при помощи криволинейного интеграла

$$I \int \left( \frac{1}{z - \alpha_p} - \frac{1}{z - \beta_p} \right) dz,$$

взятого вдоль кривой $p$. Таким путём координата $v_p$ определится однозначно в каждой точке дуги $\smile{a_p b_p} \subset p$.

Пусть $\tau > 0$. Выберем на каждой кривой дугу $\smile{a'_p b'_p}$, которая получается из дуги $\smile{a_p b_p}$, если из этой дуги выкинуть две её части $\smile{a_p a'_p}$, $\smile{b_p b'_p}$ длины $\tau$. Рассмотрим семейство всех дуг $\smile{a'_p b'_p}$. В каждой точке, лежащей на дуге этого семейства, можно считать координаты $u_p$ и $v_p$ функциями двух переменных: кривой $p$ и положения точки на $p$. Из определения $u_p$ прямо следует, что она непрерывна относительно каждого из этих переменных. Но и вторая координата $v_p$ также непрерывна на рассматриваемых дугах. Возьмём некоторую кривую $p$. Проведём круг диаметра $\frac{d}{2}$, внутри которого эллипс $E_p$ лежит целиком. Для всех кривых $p'$, достаточно близких к $p$, отвечающие им эллипсы помещаются внутри этого же круга. Все кривые $p'$ имеют диаметр больший $d$, поэтому каждая кривая имеет части, выходящие за пределы круга. Для тех точек, которые лежат вне круга, $v_p$ непрерывна относительно обеих переменных: в самом деле $v_p$ может иметь разрыв только формы $2k\pi$ ($k$ — целое) и, так как вне круга для всех дуг рассматриваемой окрестности кривой $p$ $v_p$ заключена строго между $0$ и $2\pi$, таких разрывов быть не может. Семейство $(p)$ является замкнутым семейством самонепересекающихся линий. Существует число $\theta > 0$, зависящее только от $\tau$, столь малое, что всякая дуга $\smile{a'_p b'_p}$ отстоит от точек $a_p$, $b_p$ на расстоянии $\geqslant \theta$. Предположим теперь, что рассматриваемая окрестность кривой $p$ выбрана так, что расстояние кривых этой окрестности от $p$ меньше $\frac{\theta}{2}$. Для дуг этой окрестности величина интеграла

$$\int_A^B \left( \frac{1}{z - \alpha_p} - \frac{1}{z - \beta_p} \right) dz,$$

распространённого на дугу $\smile{AB} \subset \smile{a'_p b'_p}$, непрерывно зависит от $A$, $B$ и от кривой $p$. Поэтому мы получаем, вследствие непрерывности $v_p$ вне круга и непрерывности интеграла, непрерывность $v_p$ как функции точки и кривой.

Применим теперь к каждой кривой последовательно две деформации $\vartheta_1$ и $\vartheta_2$, определённые в предыдущем параграфе. Первая из них, очевидно, непрерывна на всём семействе, но и вторая деформация $\vartheta_2$ тоже непрерывна на всём семействе. Эта деформация заключается в замене каждой точки $(u_p, v_p)$ точкой $(u'_p, v'_p)$, где $u'_p, v'_p$ — непрерывные функции от $(u_p, v_p)$, определённые в первой лемме. Следовательно, при применении операции $\vartheta_2$ к каждой дуге $\underbrace{a'_p b'_p}$ мы получаем непрерывную деформацию всего семейства этих дуг. Так как величина $\tau$ может быть выбрана сколь угодно малой, то мы можем сказать, что деформация $\vartheta_2$ непрерывна во всех точках дуг $\underbrace{a_p b_p}$, за исключением, может быть, самих точек $a_p$ и $b_p$. Эти точки остаются, однако, при образовании $\vartheta_2$ неподвижными, и они выбраны непрерывным образом на кривых семейства $(p_1)$. Из результатов леммы § 4 мы знаем, что дуги $\underbrace{a_p a'_p}$ и $\underbrace{b_p b'_p}$ длины $\tau$ переходят в дуги длины $<(1+\delta_p^2)\tau$, где $\delta_p$ может быть выбрано сколь угодно малым. Эти исключённые дуги остаются в течение нашей деформации лежать внутри кругов диаметра $2\tau$ вокруг точек $a_p$ и $b_p$. Из произвольной малости $\tau$ можно заключить, что $\vartheta_2$ непрерывна также и в точках $a_p$ и $b_p$, и следовательно, $\vartheta_2$ есть повсюду непрерывная деформация.

## § 10. Доказательство существования почти геодезической кривой в почти минимальной системе

Мы сейчас будем рассматривать семейства $B_i$ классов $[B_i]$, $i=1, 2, 3$, причём эти семейства являются результатами специальных деформаций $\vartheta$ некоторых семейств окружностей $A'_i$: $B_i=\vartheta(A'_i)$; мы определим некоторые деформации $B_i$ как образов $A'_i$.

Для удобства будем на протяжении этого параграфа считать за расстояния между двумя элементами $p_1=\vartheta(r_1)$ и $p_2=\vartheta(r_2)$ из $B_i$ расстояние $\rho_L(r_1, r_2)$ между их прообразами $r_1$ и $r_2$ из $A'_i$. В частности, если $p=\vartheta(r_1)=\vartheta(r_2)$, т. е. если кривая $r\in B_i$ есть образ двух различных окружностей $r_1$ и $r_2$ из $A'_i$, то мы будем считать, что $\vartheta(r_1)$ и $\vartheta(r_2)$ суть два различных (хотя и геометрически совпавших) элемента, расстояние между которыми равно $\rho_L(r_1, r_2)$.

Окрестностями элемента $\vartheta(r)$ из $B_i$ мы будем считать при этом образ $\vartheta(U(r))$ окрестностей $U(r)$ элемента $r$ из $A'_i$; тем самым мы считаем $B_i$ гомеоморфным $A'_i$, т. е. части трёхмерного проективного пространства $A_3$.

Если $p_1=\vartheta(r_1)$, $p_2=\vartheta(r_2)$, $a_{p_1}=\vartheta(a_{r_1})$, $a_{p_2}=\vartheta(a_{r_2})$, то мы также условимся считать расстоянием между точками $a_{p_1}$ и $a_{p_2}$ расстояние между их прообразами $a_{r_1}$ и $a_{r_2}$.

При такой метризации непрерывная деформация семейства $B_i$ есть деформация $B_i$ как образа $A'_i$.

Мы вернёмся к классам $[B_1]$, $[B_2]$, $[B_3]$.

Экватором семейства линий назовём линию этого семейства наибольшей длины.

Определение 1. Назовём семейство $B_i\subset[B_i]$ $\eta$-минимальным, если длина экватора $B_i$ не превосходит $c_i+\eta$ (длины экватора не могут быть меньше $c_i$ по определению числа $c_i$).

Определение 2. Назовём систему $B_i^0$ минимальным семейством класса $[B_i]$, если $B_i^0$ есть топологический предел последовательности $\eta_n$-минимальных семейств класса $[B_i]$ при $\eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Определение 3. Назовём кривую $p$ $\alpha$-геодезической, если:

1) диаметр $p > \frac{h}{4}$ ($h$ сохраняет своё значение, данное в § 3),

2) какова бы ни была дуга $\breve{a_p b_p}$ кривой $p$ длины $< \frac{h}{8}$, разность между длинами дуги $\breve{a_p b_p}$ и геодезической хорды $\overline{a_p b_p}$ меньше, чем $\alpha$.

Лемма 1. *Всякое $\eta$-минимальное семейство $B_i \subset [B_i]$ — содержит $\alpha$-геодезическую длины $\geqslant c_i - \eta$, где $\alpha = 20\sqrt{\eta}$.*

Доказательство. Пусть, наоборот, существует $\eta$-минимальная система $B_i$, не содержащая никакой $\alpha$-геодезической длины $\geqslant c_i - \eta$. Рассмотрим кривые $p$ диаметра $> \frac{h}{4}$ и длины $> c_i - \eta$. На каждой $p$ можно найти дугу $\breve{a_p b_p}$ такую, что

$$\operatorname{long} \breve{a_p b_p} - \operatorname{long} \overline{a_p b_p} > \alpha, \quad \operatorname{long} \breve{a_p b_p} < \frac{h}{8} \text{ (a) (long означает длина).}$$

Выбор точек $a_p b_p$ на кривой $p$ можно распространить непрерывно на близкие с $p$ кривые. (На семействе кругов $A_i'$, прообразе $B_i$, этот выбор может быть осуществлён непосредственно.) На кривых $p'$, принадлежащих окрестности $O(p)$ кривой $p$ на $B_i$, достаточно узкой, эти выбранные дуги удовлетворяют условиям

$$\operatorname{long} \breve{a_p b_p} - \operatorname{long} \overline{a_p b_p} > \alpha, \quad \operatorname{long} \breve{a_p b_p} < \frac{h}{8}.$$

Можно выбрать конечное число замкнутых окрестностей $O(p_1)$, $O(p_2), \ldots$, $O(p_k)$ таким образом, что 1) каждая кривая $p$ попадает хоть в одну из этих окрестностей; 2) каждая кривая $p$ попадает не более, чем в 4 таких окрестности.

Возможность удовлетворить первому условию вытекает из теоремы Гейне-Бореля (Heine-Borel), возможность удовлетворить второму условию вытекает из того, что множество $B_i$ гомеоморфно части проективного трёхмерного пространства (см. примечание в начале параграфа).

Можно построить также систему замкнутых окрестностей $O'(p_1)$, $O'(p_2), \ldots$, $O'(p_k)$, такую, что каждая $O(p_i)$ заключена строго внутри соответственной $O'(p_i)$ и каждая кривая попадает внутрь не более четырёх этих расширенных окрестностей $O'(p_i)$.

На кривых, принадлежащих окрестностям $O(p_i)$, мы выбрали дуги $\breve{a_{p'} b_{p'}}$, удовлетворяющие условиям (a). Мы продолжим этот выбор на кривые, заключённые в $O'(p_i)$ таким образом, что длины этих дуг останутся $< \frac{h}{8}$ и на границе $O'(p_i)$ эти дуги сведутся к точкам.

Применим процесс сглаживания $\vartheta$ к кривым окрестности $O'(p_i)$. Этот процесс преобразует каждую выбранную дугу в сегмент геодезической. Согласно результатам предыдущего параграфа эта операция непрерывна на $O'(p_i)$. На границе $O'(p_i)$ она равна 0. Все кривые вне $O'(p_i)$ мы оставляем неизменными. Следовательно, наш процесс есть непрерывная деформация $B_i$.

Длины всех кривых $O(p_i)$ уменьшаются на величину $\geqslant \frac{\alpha}{2}$. Длины всех остальных кривых не возрастают. Произведём последовательно сглаживание окрестностей $O'(p_1)$, $O'(p_2)$, ..., $O'(p_k)$ и обозначим эти операции через $\vartheta^1, \vartheta^2, \ldots, \vartheta^k$.

Пусть $p$ — кривая из $O(p_i)$. Эта кривая может быть преобразована при совершении ряда операций $\vartheta^1, \ldots, \vartheta^{i-1}$ самое большее четыре раза.

Мы имеем альтернативу: или в течение одной из операций $\vartheta^1, \ldots, \vartheta^{i-1}$ длина $p$ уменьшилась на величину, большую $2\eta$, или в течение каждой из этих операций длина $p$ уменьшилась на величину $\leqslant 2\eta$.

В этом последнем случае имеем концы выбранных дуг перенесёнными в течение каждой из операций на расстояние, меньшее $2\sqrt{\eta}$. Это есть следствие определения операции сглаживания и оценок 2°—3°, приведённых в конце § 8. Следовательно, расстояние между точками $a_p$ и $b_p$ может увеличиться лишь на величину, меньшую $16\sqrt{\eta}$. Если в результате операций $\vartheta^1, \vartheta^2, \ldots, \vartheta^{i-1}$ дуга $\smile{a_p b_p}$ преобразуется в дугу $\smile{a'_p b'_p}$, то после преобразования $\vartheta^i$ она перейдёт в сегмент геодезической $\overline{a'_p b'_p}$, причём мы имеем:

$$\operatorname{long} \smile{a_p b_p} - \operatorname{long} \overline{a'_p b'_p} > (\operatorname{long} \smile{a_p b_p} - \operatorname{long} \overline{a_p b_p}) - \\ - 16\sqrt{\eta} > \alpha - 16\sqrt{\eta} > 4\sqrt{\eta} > 4\eta$$

(так как $\eta < 1$).

Мы видим поэтому, что в обоих случаях после указанной операции всякая кривая диаметра $> \frac{h}{2}$ и длины, заключённой между $c_i - \eta$ и $c_i + \eta$, преобразуется в кривую длины $< c_i - \eta$.

Кривые же, по диаметру $\leqslant \frac{h}{2}$, после деформации, описанной в главе II (§ 2, пример 3), можно уменьшить более, чем вдвое по длине. Их максимальная длина станет меньшей $\frac{c_i + \eta}{2} < c_i - \eta$ при достаточно малом $\eta$. Все кривые исходного семейства обладали или длиной, заключённой между $c_i - \eta$ и $c_i + \eta$ (они переходили в кривые длины $\leqslant c_i - \eta$), или длиной, не превосходящей $c_i - \eta$; но так как длина кривых не возрастала при наших деформациях, то их длина осталась не превосходящей $c_i - \eta$.

Итак, после всех деформаций наше семейство деформируется в семейство с максимумом длин $\leqslant c_i - \eta$, что противоречит определению $c_i$.

Существование замкнутой геодезической линии длины $c_i$.

Лемма 2. *Всякая минимальная система класса $[B_i]$ содержит замкнутую геодезическую длины $c_i$.* (Эта лемма заменяет принцип особой точки для нашей проблемы.)

Доказательство. Пусть $B_i^0$ есть минимальное семейство в классе $[B_i]$, $i = 1, 2, 3$. По определению минимального семейства оно является пределом последовательности $\eta_n$ — минимальных семейств $B_n^i$ (где $\eta_n \to 0$). Обозначим через $\alpha_n$ число $20\sqrt{\eta_n}$. Мы имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Согласно предыдущей лемме на каждой $B_n^i$ существует $\alpha_n$-геодезическая $p_n$ длины, заключённой между $c_i - \eta_n$ и $c_i + \eta_n$. Существует последовательность индексов $\rho_n$, для которых последовательность кривых $p_{\rho_n}$ стремится к кривой $p \subset B_i^0$. Докажем, что $p$ — замкнутая геодезическая линия длины $c_i$. Пусть $a$ — произвольная точка на $p$. Выберем из кривых $p_{\rho_n}$ последовательность точек $a_{\rho_n}$, стремящихся к $a$. Построим с каждой стороны точки $a_{\rho_n}$ две малых дуги $\breve{a_{\rho_n} b_{\rho_n}}$ и $\breve{a_{\rho_n} c_{\rho_n}}$ кривой $p_{\rho_n}$, длины которых равны $\frac{h}{18}$. Имеем по определению $\alpha_n$-геодезической:

$$0 \leqslant \operatorname{long} \breve{a_{\rho_n} b_{\rho_n}} - \operatorname{long} \overline{a_{\rho_n} b_{\rho_n}} < \alpha_n,$$

т. е.

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{long} \breve{a_{\rho_n} b_{\rho_n}} = \lim_{n \to \infty} \operatorname{long} \overline{a_{\rho_n} b_{\rho_n}} = \frac{h}{18}.$$

Дуги $\breve{a_{\rho_n} b_{\rho_n}}, \breve{a_{\rho_n} c_{\rho_n}}, \breve{b_{\rho_n} c_{\rho_n}}$ стремятся к дугам $\breve{ab}$, $\breve{ac}$, $\breve{bc}$ кривой $p$. Имеем:

$$\operatorname{long} \breve{ab} \leqslant \lim_{n \to \infty} \operatorname{long} \breve{a_{\rho_n} b_{\rho_n}} = \frac{h}{18};$$

с другой стороны,

$$\operatorname{long} \breve{ab} \geqslant \operatorname{long} \overline{ab} = \lim \operatorname{long} \overline{a_{\rho_n} b_{\rho_n}} = \frac{h}{18},$$

так что

$$\operatorname{long} \breve{ab} = \operatorname{long} \overline{ab} = \frac{h}{18};$$

аналогично

$$\operatorname{long} \breve{ac} = \operatorname{long} \overline{ac} = \frac{h}{18},$$

$$\operatorname{long} \breve{bc} = \operatorname{long} \overline{bc} = \frac{h}{9}.$$

Дуги $\breve{ab}$, $\breve{ac}$, $\breve{bc}$ той же длины, что геодезические сегменты $\overline{ab}$, $\overline{ac}$, $\overline{bc}$. Поэтому эти дуги совпадают с соответствующими геодезическими сегментами. Точка $c$ расположена в середине этой геодезической дуги $\breve{ab} = \overline{ab}$.

Но $a$, следовательно и $c$, — произвольная точка $p$. Следовательно, $p$ — замкнутая геодезическая. Длина каждой дуги $p$ — предел длин стремящихся к ней дуг кривых $p_{\rho_n}$. Следовательно,

$$\operatorname{long} p = \lim_{\rho_n \to \infty} \operatorname{long} p_{\rho_n} = c_i.$$

Лемма 3. *Определённая в лемме 2 замкнутая геодезическая $p$ не имеет двойных точек.*

Кривые $p_{\rho_n}$ леммы 2—самонепересекающиеся кривые. Следовательно, $p$ может самое большее самокасаться. Но у геодезической не может быть точек самокасания. Следовательно, $p$ есть кривая самонепересекающаяся.

Она не может свестись к дважды (или вообще к $n$ раз) ($n \geqslant 2$) повторённой замкнутой кривой меньшей длины.

В самом деле, пределом последовательности самопересекающихся кривых такая кривая быть не может.

Докажем это для случая плоскости. Отобразив любую поверхность жанра 0 (без одной точки) на плоскость, можем обобщить последнее рассуждение для любой такой поверхности.

Пусть плоская, спрямляемая, $n$ раз повторённая в одном направлении кривая $Q$ есть предел последовательности самопересекающихся спрямляемых кривых $Q_n$. Выберем точку $a$ внутри $Q$. Она попадает внутрь почти всех $Q_n$. Рассматривая нашу плоскость как плоскость комплексного $z$ и обозначая через $\alpha$ комплексную координату точки $a$, получим:

$$\int_{Q_n} \frac{dz}{z-\alpha} = 2\pi i,$$
$$\int_{Q} \frac{dz}{z-\alpha} = 2n\pi i.$$

Мы пришли к противоречию, так как

$$\lim_{n\to 0} \int_{Q_n} \frac{dz}{z-\alpha} = \int_{Q} \frac{dz}{z-\alpha}.$$

Из формулировки леммы следует существование трёх замкнутых геодезических в случае различия чисел $c_i$ (см. стр. 203).

Эта лемма, дающая доказательство существования решений вариационной задачи, аналогична принципу особой точки.

## § 11. Применение теории категорий

Нам остаётся рассмотреть случай совпадения двух чисел $c_i$.

В гл. I мы исследовали аналогичный случай для задачи экстремума функций, определённых на многообразии. Наши рассуждения будут в общем аналогичны рассуждениям этого параграфа и тоже основаны на использовании свойств категории.

Лемма 3. *Если $c_i = c_{i+p}$, то всякое $\eta$-минимальное семейство содержит множество $\alpha$-геодезических, длины которых заключены между $c_i - \eta$ и $c_i + \eta$, причём категория этого семейства не меньше $p+1$ ($\alpha = 20\sqrt{\eta}$).*

Доказательство. Пусть $G$ есть множество всех $\alpha$-геодезических $\eta$-минимального семейства $B_{i+p}$ и положим, что его категория меньше или равна $p$; $B_{i+p}$ есть образ некоторого семейства $A$ окружностей (т. е. некоторой части проективного пространства). Обозначим через $\overline{G}$ семейство окружностей, переходящее при деформации $A$ в $B_{i+p}$ в семейство $G$. $A$ как часть проективного пространства можно считать метрическим пространством. Можно построить вокруг $\overline{G}$ такую сферу $\rho(\overline{G}, \varepsilon)$ в $A$, категория которой относительно $A_3$ тоже $\leqslant p$; обозначим через $C$ множество $A - \rho(\overline{G}, \varepsilon)$. Имеем $\operatorname{cat} C \geqslant i$; обозначим через $C'$ семейство, отвечающее $C$ при деформации $A$ в $B_{i+p}$; $C'$ не содержит общих элементов с $G$ (ибо $C'$ есть образ множества, лежащего в дополнении к прообразу $G$). Категория $C'$ не меньше $i$.

Следовательно, $C'$ входит в класс $[B_i]$. Максимум длин кривых на $C'$ не превосходит $c_i + \eta$ (так как $C'$ — часть $\eta$-минимального семейства $B_{i+p}$ с максимумом длин, не превосходящим $c_{i+p} + \eta = c_i + \eta$). Следовательно, $C'$ есть $\eta$-минимальное семейство класса $[B_i]$ и содержит по крайней мере одну $\alpha$-геодезическую длины $\geqslant c_i - \eta$. Эта $\alpha$-геодезическая входит в $G$. Но $C'$ и $G$ не имеют общих элементов. Противоречие, полученное нами, доказывает лемму.

Лемма 4. *Пусть $c_i = c_{i+p}$ ($i = 1, 2$; $p = 1, 2$), тогда минимальная система $B_i^0$ содержит семейство самонепересекающихся замкнутых геодезических длины $c_i$, $p$ раз покрывающих поверхность.*

Это утверждение аналогично теореме § 5 гл. II. Обратим внимание, что семейство почти-геодезических, полученное в предыдущей лемме, $p$ раз покрывает поверхность (см. пример 2 в § 2 гл. II). Приведённая в § 2 гл. II лемма вместе с рассуждениями леммы 2 доказывает наше предложение. Вместе с тем доказана и основная теорема. Возможны три случая:

1. $c_1 < c_2 < c_3$.
2. $c_1 < c_2 = c_3$ или $c_1 = c_2 < c_3$.
3. $c_1 = c_2 = c_3$ $(p = 2)$.

Им отвечают три случая в формулировке теоремы (см. стр. 203).