

ИЗ ТЕКУЩЕЙ ЛИТЕРАТУРЫ

533.951

**ВОЛНЫ С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ
И АНОМАЛЬНЫЙ ЭФФЕКТ ДОППЛЕРА***М. В. Незмин*

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	481
1. Волны с положительной и отрицательной энергией в электронных пучках и плазме	481
2. Неустойчивость при взаимодействии волн с различными знаками энергии	485
3. Аномальный эффект Допплера	489
4. Аналогия, границы существования эффектов	491
Цитированная литература	494

ВВЕДЕНИЕ

В этой статье, как видно из ее заглавия, речь идет о двух красивых физических явлениях. Оба они давно открыты и имеют достаточно большую «сферу действия» в общей физике¹⁻³, физике плазмы³⁻⁶ и электронике⁷. До сих пор эти явления рассматривались независимо. Автор обратил внимание на то, что между раскачкой волн с отрицательной энергией (в средах с пучками заряженных частиц) и аномальным эффектом Допплера существует глубокая физическая аналогия. Намерение показать эту аналогию — на примерах электронного пучка в плазме и структурах электроники СВЧ — и составляет цель данной статьи, большая часть которой имеет, естественно, реферативный характер.

1. ВОЛНЫ С ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ И ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ
В ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКАХ И ПЛАЗМЕ

Представление о волнах отрицательной энергии в диспергирующих средах и механизмах их неустойчивости с точки зрения общей физики и физики плазмы было впервые дано в работе Кадомцева, Михайловского и Тимофеева³, хотя в ограниченном смысле, применительно к электронным пучкам в генераторах и усилителях СВЧ-колебаний типа лампы с бегущей волной, оно было известно раньше⁷. Напомним физический смысл этого представления.

Пусть в однородной среде с диэлектрической проницаемостью ϵ распространяется вдоль некоторого направления z «монохроматическая» волна, электрическое поле которой $E(z, t)$ изменяется по закону

$$E = E_0 \exp [i(kz - \omega t)]. \quad (1.1)$$

Если величина ε не зависит от частоты ω , т. е. дисперсия отсутствует, то плотность энергии волны W определяется выражением: $W = \varepsilon (\overline{E^2}/8\pi)$, где черта сверху означает усреднение по периоду колебаний, а величина W представляет собой сумму электрической энергии поля и кинетической энергии колебаний частиц. При наличии дисперсии, согласно ⁸,

$$W = \frac{\overline{E^2}}{8\pi} \frac{d}{d\omega} (\varepsilon\omega), \quad (1.2)$$

где под ε и ω имеются в виду их действительные части $\text{Re } \varepsilon$ и $\text{Re } \omega$. Если среда находится в термодинамическом равновесии, то энергия волны W всегда положительна ⁸. Однако в неравновесной среде, как показано в пионерской работе ³, знак энергии W может быть любым: все зависит от характера дисперсии. В случае $d\varepsilon\omega/d\omega < 0$ говорят, что волна несет отрицательную энергию, имея при этом в виду, что энергия среды с возбужденной в ней волной оказывается меньшей, чем без волны ³.

Пусть теперь средой является холодная плазма, состоящая из электронов и «неподвижных» положительных ионов, концентрация частиц каждого сорта n_e . Примем для простоты, что магнитное поле отсутствует (хотя, как будет показано ниже, все полученные результаты сохраняются и при наличии сильного магнитного поля). В этом случае диэлектрическая проницаемость для высокочастотной электромагнитной волны определяется хорошо известным соотношением

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_e^2}{\omega^2}, \quad (1.3)$$

где $\omega_e = \sqrt{4\pi n_e e^2/m}$ — лэнгмюровская частота собственных продольных (вдоль \mathbf{E}) колебаний электронов, возникающих вследствие их (начального) смещения относительно ионов. Для лэнгмюровских колебаний ($\omega = \omega_e$) выражение (1.3) дает дисперсионное уравнение

$$\varepsilon = 0. \quad (1.4)$$

Это уравнение справедливо не только для данного частного случая, но и вообще для всех потенциальных колебаний (волн) объемного заряда. Оно сразу следует из уравнения Пуассона $\text{div } \mathbf{D} = 0$ ($\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, в плазме нет некомпенсированных зарядов), откуда $\varepsilon \cdot \text{div } \mathbf{E} = 0$, т. е. $\varepsilon = 0$, поскольку для объемных волн $\text{div } \mathbf{E} \neq 0$.

Пусть теперь все электроны движутся относительно ионов вдоль направления z с одинаковой постоянной скоростью \mathbf{u} , т. е. представляют собой моноэнергетический пучок; концентрацию электронов пучка будем обозначать n_1 . Переходя в систему отсчета пучка, получим то же самое выражение (1.3) для ε , в которое в качестве ω_e войдет лэнгмюровская частота пучка $\omega_1 = \sqrt{4\pi n_1 e^2/m}$, а в качестве ω — частота $\omega' = \omega - \mathbf{k}\mathbf{u}$, где \mathbf{k} — волновой вектор колебаний. В самом деле, согласно эффекту Доплера, частота колебаний в лабораторной системе отсчета, связанной с неподвижными ионами, $\omega = \frac{\omega'}{1 - (\mathbf{k}\mathbf{u}/\omega)}$, откуда и получается приведенное выражение для ω' . Следовательно, для пучка

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_1^2}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})^2} \quad (1.5)$$

и, согласно (1.2), энергия колебаний

$$W = \frac{\overline{E^2}}{8\pi} \frac{2\omega\omega_1^2}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})^3}, \quad (1.6)$$

где k — проекция \mathbf{k} на направление \mathbf{u} (в рассматриваемых продольных колебаниях $\mathbf{k} \parallel \mathbf{E} \parallel \mathbf{u}$). Видно, что

$$\begin{aligned} W > 0 & \text{ при } u < \frac{\omega}{k}, \\ W < 0 & \text{ при } u > \frac{\omega}{k}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Величину $(\omega - ku)$ найдем из дисперсионного уравнения (1.4). С учетом (1.5) имеем

$$\omega - ku = \pm \omega_1. \quad (1.8)$$

Это означает, что лэнгмюровские колебания пучка образуют в системе неподвижных ионов две волны пространственного заряда: быструю — с фазовой скоростью $\omega/k > u$ (знак плюс в (1.8)) и медленную — с фазовой скоростью $\omega/k < u$ (знак минус в (1.8)). Плотность энергии этих волн, согласно (1.6),

$$W = \pm \frac{\bar{E}^2 \omega}{4\pi\omega_1}, \quad (1.9)$$

где знак плюс относится к быстрой волне, а знак минус — к медленной. Таким образом, быстрая волна пучка имеет положительную энергию, а медленная — отрицательную. Отрицательный знак энергии одной из волн связан с термодинамической неравновесностью среды, обусловленной ее резкой анизотропией — наличием пучка частиц.

Для пояснения физического смысла полученного результата дадим другой вывод выражения (1.9), не пользуясь определением (1.2). Как уже указывалось, энергия волны W представляет собой сумму энергии электрического поля $W_E = \bar{E}^2/8\pi$ и кинетической энергии колебаний частиц W_K . Последняя равна изменению кинетической энергии пучка под влиянием волны:

$$W_K = \frac{m}{2} \overline{(u+v)^2} (n_1 + n) - \frac{m}{2} u^2 n_1, \quad (1.10)$$

где v и n — возмущения скорости и плотности электронов пучка под влиянием волны (в рассматриваемых продольных колебаниях $\mathbf{v} \parallel \mathbf{u} \parallel \mathbf{E}$), а черта сверху по-прежнему означает усреднение по периоду колебаний. Величины v и n определим из уравнения движения и уравнения Пуассона

$$\frac{d}{dt} (u+v) \equiv \frac{dv}{dt} \equiv \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{e}{m} E$$

и

$$\operatorname{div} \mathbf{E} \equiv ikE = 4\pi ne.$$

Учитывая, что величины v , n и E изменяются по гармоническому закону (1.1), получим

$$\begin{aligned} v &= i \frac{e}{m} \frac{E}{(\omega - ku)}, \\ n &= \frac{1}{4\pi e} ikE, \end{aligned} \quad (1.11)$$

или, с учетом (1.8),

$$\frac{v}{n} = \pm \frac{4\pi e^2}{mk} \frac{1}{\omega_1}, \quad (1.12)$$

где знак плюс относится к быстрой волне, а знак минус — к медленной. Видно, что возмущения скорости и плотности пучка в медленной волне происходят в противофазе, что, как сейчас будет показано, и определяет

отрицательный знак кинетической энергии W_K и полной энергии $W = W_K + W_E$ этой волны (в быстрой волне возмущения v и n изменяются в фазе, и поэтому величины W_K и W положительны) ⁹.

Согласно (1.10) для медленной волны

$$W_K = \frac{m}{2} \left\{ \left[\frac{1}{T} \int_0^T (n_1 - n_0 \sin \omega t) (u + v_0 \sin \omega t)^2 dt \right] - n_1 u^2 \right\}, \quad (1.13)$$

где n_0 и v_0 — амплитуды величин n и v (поскольку усреднение (1.13) производится по периоду колебаний T , то результат, конечно, не изменится, если знаки сложения и вычитания в круглых скобках под интегралом одновременно поменять на обратные). Из (1.13), (1.11) и (1.12) имеем

$$W_K^M = -\frac{E_0^2}{8\pi} \frac{ku}{\omega_1} + \frac{E_0^2}{16\pi}, \quad (1.14)$$

где E_0 — амплитуда поля E , определяющая величины v_0 и n_0 согласно (1.11), а индекс «м» означает принадлежность к медленной волне.

Следовательно, плотность полной энергии медленной волны

$$W^M = W_K^M + \frac{E_0^2}{16\pi} = -\frac{E_0^2}{8\pi} \frac{\omega}{\omega_1} = -\frac{\overline{E^2}}{4\pi} \frac{\omega}{\omega_1} \quad (1.15)$$

(где учтено соотношение (1.8)). При вычислении плотности кинетической энергии быстрой волны W_K^6 в круглых скобках под интегралом (1.13) следует, согласно (1.12), поставить одинаковые знаки. При этом получим

$$W_K^6 = \frac{E_0^2}{8\pi} \frac{ku}{\omega_1} + \frac{E_0^2}{16\pi}, \quad (1.14)$$

$$W^6 = W_K^6 + \frac{E_0^2}{16\pi} = +\frac{\overline{E^2}}{4\pi} \frac{\omega}{\omega_1}. \quad (1.15)$$

Видно, что выражения (1.15) для обеих волн пучка, полученные простым кинематическим рассуждением, в точности совпадают с выражением (1.9), при выводе которого было использовано общее определение (1.2) энергии волн.

Запишем теперь энергетические соотношения для полной энергии системы (пучок + волна). Эта энергия — сумма кинетической энергии электронов пучка T и энергии электрического поля волны $\overline{E^2}/8\pi$ — при возбуждении волны изменяется следующим образом:

$$T^6 + \frac{\overline{E^2}}{8\pi} = T^0 + W^6, \quad (1.16)$$

$$T^M + \frac{\overline{E^2}}{8\pi} = T^0 - |W^M|,$$

где индексы «б» и «м» означают наличие волн, а индекс «о» — их отсутствие. Видно, что если возбуждена быстрая волна, то полная энергия системы (пучок + волна) оказывается больше, а если возбуждена медленная волна, то меньше первоначальной энергии пучка, и указанная разность энергий, согласно (1.16), как раз равна абсолютной величине энергии возбужденных волн. В этом и состоит физический смысл положительной и отрицательной энергии волн ^{3,7,14}. Что же касается не полной энергии колебаний W , а энергии их электрического поля, то она, естественно, положительна и возрастает с увеличением амплитуды волны: $W_E^M = W_E^6 = E_0^2/16\pi$.

Проведенный здесь вывод выражения для W проясняет еще одно принципиальное обстоятельство: энергия одной из лэнгмюровских волн в среде

оказывается отрицательной только потому, что эта среда (в данном случае — пучок) движется. Это непосредственно видно из соотношений (1.14) и (1.15): если положить $u = 0$, то кинетическая и полная энергия медленной волны будут положительными. Для плазмы, неподвижной как целое, согласно (1.14) и (1.15),

$$W_E = W_K = \frac{\overline{E^2}}{8\pi},$$

$$W = W_E + W_K = \frac{\overline{E^2}}{4\pi}. \quad (1.17)$$

Этот результат означает, что полная энергия лэнгмюровских колебаний покоящейся плазмы положительна и складывается поровну из двух положительных величин: кинетической энергии колебаний электронов и энергии электрического поля. Точно такой же результат (1.17), как легко видеть, получается и другим способом — вычислением W с помощью соотношений (1.2) и (1.3).

Наконец, отметим, что в электронике СВЧ используются так называемые замедляющие структуры. Распространенным примером таких систем является окружающая пучок металлическая спираль, применяемая в приборах типа лампы с бегущей волной⁷. Шаг спирали подобран так, чтобы осевая скорость электромагнитной волны, возбуждаемой пучком в спирали, была близка к скорости пучка. Согласно сказанному выше ясно, что, поскольку спираль неподвижна, энергия волны в спирали всегда положительна.

2. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН С РАЗЛИЧНЫМИ ЗНАКАМИ ЭНЕРГИИ

Полученный в гл. 1 результат (1.16) означает, что для возбуждения в электронном пучке быстрой волны объемного заряда в нее необходимо вводить дополнительную энергию, а для возбуждения медленной волны у нее необходимо отнимать энергию. Иными словами, для раскачки медленной волны необходим какой-то канал диссипации ее энергии. Таким каналом может быть, например, передача энергии этой волны другой волне, связанной с неподвижной средой и поэтому имеющей положительную энергию — например, лэнгмюровским колебаниям покоящейся плазмы или электромагнитной волне в замедляющей структуре СВЧ. Рассмотрим обе эти возможности.

Если пропустить электронный пучок через плазму и сделать так, чтобы медленная волна пучка отдавала энергию плазменной волне, то будут раскачиваться обе эти волны (разумеется, за счет кинетической энергии пучка), т. е. возникнет так называемая пучковая неустойчивость. Чтобы сформулировать условие пучковой неустойчивости на языке рассматриваемых представлений, обратимся снова к выражению для диэлектрической проницаемости среды. Как видно из (1.3) и (1.5), для системы (пучок + плазма)

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_1^2}{(\omega - ku)^2} - \frac{\omega_2^2}{\omega^2}. \quad (2.1)$$

Чтобы эта система была неустойчивой, необходимо, чтобы медленная волна пучка обладала достаточно большим «резервуаром», из которого могла бы черпаться энергия, идущая на раскачку плазменной волны. Для этого нужно, чтобы (отрицательный) вклад медленной волны в полную энергию (1.2) колебаний системы пучок — плазма был по абсолютной величине

больше (положительного) вклада плазменной волны, т. е.

$$\frac{\omega\omega_1^2}{|(\omega - ku)^3|} > \frac{\omega_e^2}{\omega^2},$$

или

$$\frac{|\omega - ku|}{\omega} < \left(\frac{n_1}{n_e}\right)^{1/3}. \quad (2.2)$$

Видно, что пучковая неустойчивость возникает, начиная с некоторой пороговой плотности пучка. Нетрудно видеть, что точно такое же выражение для порога пучковой неустойчивости получается и непосредственно из дисперсионного уравнения $\varepsilon = 0$, т. е. ^{10а}

$$1 - \varepsilon(\omega) \equiv \frac{\omega_1^2}{(\omega - ku)^2} + \frac{\omega_e^2}{\omega^2} = 1. \quad (2.3)$$

Решить это уравнение (4-й степени относительно ω) лучше всего графическим методом ¹¹. На рис. 1 показана функция $y = 1 - \varepsilon(\omega)$ (левая часть уравнения (2.3)) и прямая $y \equiv 1$ (правая часть уравнения (2.3)). Если они пересекаются в четырех точках, то все корни ω действительные, и неустойчивости нет, если — в

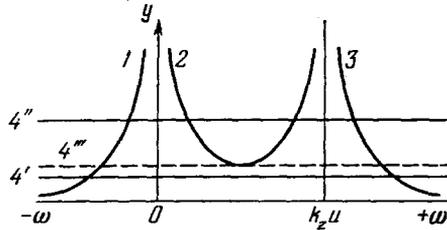


Рис. 1. Дисперсионные кривые. 1—3 — ветви функции $y = 1 - \varepsilon(\omega, k)$ при $k = \text{const}$, 4 — прямая $y = 1$ (4' — неустойчивость, 4'' — устойчивость, 4''' — пороговый (критический) режим).

двух точках, то два корня из четырех мнимые и один из них имеет положительную мнимую часть ($\omega = \text{Re } \omega + i\gamma$, $\gamma > 0$), что, согласно (1.1), и означает раскачку колебаний. Порог неустойчивости соответствует касанию прямой $y \equiv 1$ и средней ветви функции $y = 1 - \varepsilon(\omega)$. В точке касания

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} = 0, \quad (2.4)$$

что в совокупности с (2.1) дает порог неустойчивости. Из (2.4) и (1.2) видно, что этот порог в точности совпадает с порогом (2.2). Критическому режиму (2.4), с которого начинается неустойчивость, согласно (2.3), соответствует частота колебаний

$$\omega = \frac{ku}{1 + (n_1/n_e)^{1/3}}. \quad (2.5)$$

Для дальнейшего нам важно отметить, что эта частота удовлетворяет условию

$$u > \frac{\omega}{k}: \quad (2.5')$$

скорость пучка больше фазовой скорости колебаний.

Мы рассмотрели бесстолкновительную пучковую неустойчивость. Теперь несколько усложним задачу: допустим, что электроны плазмы испытывают столкновения (между собой, с ионами и нейтральным газом) с частотой ν . Если бы пучка не было, а в плазме были возбуждены ленгмюровские колебания, то столкновения (диссипация энергии) приводили бы к затуханию колебаний, поскольку энергия плазменных колебаний положительна. При наличии пучка диссипация энергии колебаний может привести к раскачке медленной волны (поскольку ее энергия отрицательна) и тем самым облегчить неустойчивость. Чтобы в этом убедиться, запишем дисперсионное уравнение колебаний с учетом указанных столкновений ^{10б}:

$$1 - \varepsilon \equiv \frac{\omega_1^2}{(\omega - ku)^2} + \frac{\omega_e^2}{\omega(\omega + i\nu)} = 1 \quad (2.6)$$

(мнимая добавка к частоте колебаний как раз и дает отмеченное выше затухание плазменных колебаний в отсутствие пучка). Порогу неустойчивости соответствует условие $\partial(\omega \operatorname{Re} \epsilon)/\partial\omega = 0$ согласно излагаемому «энергетическому» подходу и $\partial \operatorname{Re} \epsilon/\partial\omega = 0$ согласно уравнению (2.4). Оба эти условия совпадают, поскольку на пороге неустойчивости $\operatorname{Re} \epsilon(\omega) = 0$. Из (2.6) видно, что неустойчивость имеет место при условии

$$\frac{n_1}{n_e} \equiv \frac{\omega_1^2}{\omega_e^2} > \frac{\omega |\omega - ku|^3}{(\omega^2 + v^2)^2}, \quad (2.7)$$

которое мягче «бесстолкновительного» условия (2.2). Таким образом, столкновения (диссипация энергии) понижают порог неустойчивости: неустойчивость возникает там, где ее раньше не было. Это явление называется диссипативной неустойчивостью. Легко видеть, что частота колебаний, на которой начинает развиваться неустойчивость, меньше (2.5) и тем более удовлетворяет условию

$$u > \frac{\omega}{k}. \quad (2.5')$$

Рассмотрим еще два примера пучковой неустойчивости. Пусть электронный пучок распространяется сквозь «фон» компенсирующих его объемный заряд ионов, имеющих конечную массу M , причем третьей компоненты (электронов плазмы) нет. Колебательные свойства такого квазинейтрального пучка описываются уже знакомым нам уравнением (2.3), в котором вместо лэнгмюровской электронной частоты ω_e входит лэнгмюровская ионная частота, $\omega_+ = \sqrt{4\pi n_+ e^2/M}$, а $n_+ = n_1$ — концентрация ионов:

$$\frac{\omega_1^2}{(\omega - ku)^2} + \frac{\omega_+^2}{\omega^2} = 1. \quad (2.3')$$

Соответственно

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_1^2}{(\omega - ku)^2} - \frac{\omega_+^2}{\omega^2}. \quad (2.4)$$

Эта задача полностью аналогична уже рассмотренной выше. Неустойчивость (в литературе ее обычно называют неустойчивостью Бунемана¹²) развивается вследствие того, что медленная волна пучка, несущая отрицательную энергию, передает энергию ионной волне, несущей положительную энергию, и за счет этого раскачивается сама. Порог неустойчивости, как и в предыдущей задаче, определяется как из «энергетического» подхода, так и из непосредственного решения дисперсионного уравнения и, естественно, имеет один и тот же вид¹³. Здесь важно отметить, что порогу неустойчивости соответствует частота колебаний

$$\omega = \frac{ku}{1 + (M/m)^{1/3}}, \quad \frac{\omega}{ku} \ll \left(\frac{m}{M}\right)^{1/3}, \quad (2.8)$$

опять-таки удовлетворяющая (с большим «запасом») условию

$$u > \frac{\omega}{k}. \quad (2.5')$$

Квазинейтральный электронный пучок испытывает еще одну неустойчивость, если он имеет конечные поперечные размеры (и, неизбежно) неоднородный поперечный профиль плотности и распространяется вдоль сильного внешнего магнитного поля ($\mathbf{H} = \mathbf{H}_z$). Эта неустойчивость, ограничивающая предельный ток пучка¹³, также описывается дисперсионным уравнением $\epsilon = 0$, в котором вклад электронов пучка в диэлектрическую проницаемость определяется выражением (малосущественные детали

опускаем) ¹³

$$\varepsilon_{\text{пучка}} \approx 1 - \frac{\omega_1^2}{(\omega - k_z u)^2} \frac{k_z^2}{k^2} - \frac{\omega_1^2}{\omega_H (k_z u - \omega)}, \quad (2.9)$$

где k — абсолютная величина полного волнового вектора колебаний \mathbf{k} , k_z — величина проекции \mathbf{k} на ось z (продольное волновое число), $\omega_H = eH/mc$ — ларморовская частота электронов ($\omega_H > \omega, \omega_1, k_z u$). Видно, что, согласно (1.2), энергия медленной волны пучка и в этом случае отрицательна. Механизм этой неустойчивости — с рассматриваемой точки зрения — аналогичен механизму неустойчивости Бунемана. Для нарастающей волны опять реализуется условие

$$u > \frac{\omega}{k_z} : \quad (2.5')$$

скорость пучка больше фазовой скорости колебаний.

Здесь весьма уместно заметить, что, как показывает последний пример, наличие сильного внешнего магнитного поля не влияет на выводы, к которым мы пришли выше, когда предполагали (для простоты записи формул), что магнитное поле отсутствует. При наличии (сильного) поля во все приведенные выше формулы следует вместо величины \mathbf{k} подставить ее проекцию k_z на направление $\mathbf{H} = H_z \mathbf{e}_z$).

Обратимся теперь к некоторым примерам из области электроники, где неустойчивость волн с отрицательной энергией используется для генерации и усиления СВЧ-колебаний ⁷. В упоминавшейся выше лампе с бегущей волной раскачка электромагнитной волны в окружающей пучок спирали (энергия волны положительна) производится медленной волной объемного заряда пучка, несущей отрицательную энергию, при условии синхронности обеих волн (когда их фазовые скорости одинаковы) ^{7, 14}:

$$v_{\Phi}^c \equiv \frac{\omega}{k_z} = v_{\Phi}^m \equiv u - \frac{\omega_1}{k_z}, \quad (2.10)$$

где v_{Φ}^c и v_{Φ}^m — фазовые скорости волн в структуре вдоль оси спирали и медленной волны пучка, k_z — продольное (вдоль пучка) волновое число. При условии (2.10) волна положительной энергии в спирали является «диссипативной» нагрузкой для медленной волны пучка, и обе волны нарастают во времени. Из (2.10) видно, что это происходит при:

$$u > \frac{\omega}{k_z} : \quad (2.5')$$

пучок «обгоняет» волну в окружающей его СВЧ-структуре.

В так называемом резистивном усилителе микроволн ¹⁵ с целью создания диссипативной нагрузки для медленной волны пучка пучок окружается стенками с конечной (относительно малой) проводимостью. В этой системе электрическое поле медленной волны пучка вызывает в стенках ток проводимости и тем самым джоулевы потери энергии волны, что и приводит к ее раскачке (разумеется, за счет кинетической энергии электронов пучка). Составим дисперсионное уравнение такой системы. Для этого прежде всего найдем плотности токов, вызываемых полем волны в пучке и стенках:

$$j_{\text{пучка}} = n_1 e v = i \frac{n_1 e^2 E}{(\omega - k u) m} \quad (\text{согласно (1.11)})$$

и $j_{\text{стенки}} = \sigma E$, где σ — проводимость. Согласно уравнению непрерывности плотности объемных зарядов в пучке и стенках определяются

*) И умножить величины ω_1^2 и ω_2^2 на k_z^2/k^2 ; подробнее см. работу ¹³.

СООТНОШЕНИЯМИ

$$-i(\omega - ku) \rho_{\text{пучка}} \equiv \frac{\partial \rho_{\text{пучка}}}{\partial t} = -\text{div } \mathbf{j}_{\text{пучка}},$$

$$-i\omega \rho_{\text{стенки}} \equiv \frac{\partial \rho_{\text{стенки}}}{\partial t} = -\text{div } \mathbf{j}_{\text{стенки}}.$$

Подставляя полную плотность объемного заряда $\rho = \rho_{\text{пучка}} + \rho_{\text{стенки}}$ в уравнение Пуассона $\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho$, получаем дисперсионное уравнение

$$\frac{\omega_1^2}{(\omega - ku)^2} + \frac{4\pi\sigma}{i\omega} = 1, \quad (2.11)$$

откуда

$$\omega - ku = \pm \omega_1 \left(1 - i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right), \quad (2.12)$$

где знак плюс в правой части относится к быстрой волне, а знак минус — к медленной. Видно, что у медленной волны мнимая часть частоты имеет положительный знак, что, согласно (1.1), означает раскачку колебаний (неустойчивость). И в этом примере, как и во всех предыдущих, мы встречаемся с такой ситуацией, когда неустойчивость возникает при условии

$$u > \frac{\text{Re } \omega}{k}, \quad (2.5')$$

т. е. когда все электроны пучка движутся быстрее возбуждаемой ими волны.

Наконец, упомянем еще об одном усилителе микроволн, в котором два электронных пучка с неодинаковыми скоростями распространяются сквозь фон «неподвижных» компенсирующих ионов (так называемая электронно-волновая лампа¹⁶). Здесь пучок с меньшей скоростью представляет собой диссипативную нагрузку для медленной волны пучка с большей скоростью. Легко видеть (мысленно перейдя в систему отсчета одного из пучков), что механизм неустойчивости (раскачки колебаний) в данном случае совершенно такой же, как в рассмотренных выше случаях пучка в плазме или замедляющей структуре СВЧ. Условие (2.5') в этом случае, естественно, также выполняется.

3. АНОМАЛЬНЫЙ ЭФФЕКТ ДОПплера

Здесь мы только ограничимся напоминанием о физическом смысле этого замечательного явления, отсылая читателя к основополагающим работам Гинзбурга и Франка¹ и их обзорам², а также к лекциям Тамма и Франка¹.

Вспомним сначала о более «популярном» в настоящее время явлении, которое носит название «излучение Вавилова — Черенкова»¹. Это (электромагнитное) излучение, как известно, возникает тогда, когда заряженная частица движется в среде со скоростью ($\mathbf{u} = \mathbf{u}_z$), превышающей скорость света $v_\Phi = c/N$ в данной среде:

$$u > \frac{\omega}{k}, \quad u = \frac{\omega}{k_z}, \quad (3.1)$$

где $\omega/k = c/N = v_\Phi$, $k_z = k \cos \theta_0$, N — показатель преломления среды (последняя предполагается однородной и изотропной). Излучение наблюдается только под углом θ_0 к направлению скорости частицы — таким, что

$$\cos \theta_0 = \frac{c/N}{u} = \frac{\omega}{ku}, \quad (3.1')$$

т. е. только вдоль так называемого черенковского конуса (рис. 2; по²).

Возьмем теперь вместо свободной заряженной частицы систему, обладающую, кроме кинетической энергии T , также и внутренней энергией U (например, произвольный осциллятор). Если эта система испускает в направлении θ квант с энергией $\hbar\omega \ll T$ и импульсом $\hbar\mathbf{k}$, то она испытывает

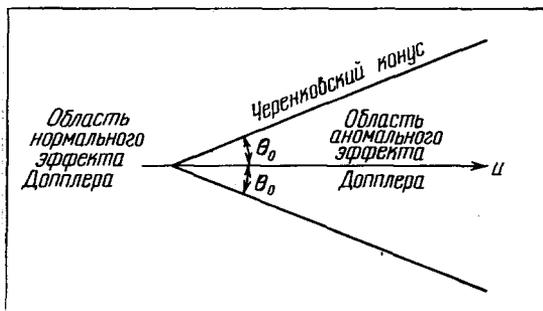


Рис. 2. (Выполнен по работе ².)

«отдачу», вследствие которой ее кинетическая энергия уменьшается на величину $|\Delta T| = \hbar k_z u = \hbar k u \cos \theta$. Следовательно,

$$\frac{\Delta T}{\hbar\omega} = \frac{k_z u}{\omega} = \frac{u}{\omega/k_z} = \frac{u \cos \theta}{v_\Phi}. \quad (3.2)$$

Но теперь возникает любопытная ситуация:

$$\text{при } u > \frac{\omega}{k_z} \quad |\Delta T| > \hbar\omega; \quad (3.3)$$

система теряет больше кинетической энергии, чем уносит излучаемый ею квант (!). Это один из кажущихся парадоксов «сверхсветового» движения (в оптике это случай $u \cos \theta > c/N$). Чтобы рассматриваемое излучение было возможно, избыток теряемой энергии должен пойти на повышение внутренней энергии системы:

$$\Delta U = \hbar\omega \left(\frac{k_z u}{\omega} - 1 \right) = \hbar\omega \left(\frac{u \cos \theta}{v_\Phi} - 1 \right). \quad (3.4)$$

Итак, при условии (3.3) система излучает энергию и при этом сама переходит в более возбужденное состояние (!). Это явление и называется аномальным эффектом Доплера. От нормального («обычного», в частности, «досветового») эффекта Доплера оно отличается «только» знаком ΔU в формуле (3.4): при нормальном эффекте Доплера выполняются неравенства, обратные (3.3); при этом, согласно (3.4), излучение кванта происходит («как обычно») за счет уменьшения внутренней энергии системы. Нормальный эффект Доплера отделяет от аномального такая ситуация, когда выполняется черенковское условие (3.1), (3.1'). При этом $\Delta U = 0$: излучение кванта под черенковским углом $\theta_0 = \arccos(v_\Phi/u)$ происходит без изменения внутренней энергии системы. Поэтому излучение Вавилова — Черенкова может испускать, в частности, и свободная заряженная частица, не имеющая внутренних степеней свободы. Итак, при «сверхсветовом» движении системы ($u > v_\Phi$) — в зависимости от направления излучения — возможны все три эффекта: при $\theta > \theta_0$ — нормальный эффект Доплера; при $\theta = \theta_0$ — эффект Вавилова — Черенкова; при $\theta < \theta_0$ — аномальный эффект Доплера. При «досветовом» движении ($u < v_\Phi$) существует только нормальный эффект Доплера.

Рассмотрим теперь частный случай, когда осциллятором является заряженная частица (например, электрон), движущаяся свободно вдоль внешнего магнитного поля ($\mathbf{H} = \mathbf{H}_z$) со скоростью u и имеющая небольшую поперечную ($\perp \mathbf{H}$) компоненту скорости. Энергия вращения этой частицы в поле H (внутренняя энергия осциллятора) может изменяться квантами

$$\Delta U = n\hbar\omega_H, \quad \omega_H = \frac{eH}{mc},$$

m — масса частицы, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Согласно соотношению (3.4), выражающему закон сохранения энергии,

$$n\hbar\omega_H = \hbar(\omega - k_z u), \quad (3.5a)$$

или

$$\omega - k_z u = n\omega_H. \quad (3.5b)$$

Случай $n > 0$ соответствует нормальному эффекту Допплера: в системе отсчета осциллятора частота излучения $(\omega - k_z u)$ равна частоте соответствующего квантового перехода. Случай $n < 0$ отвечает аномальному эффекту Допплера; $\hbar k_z u = \hbar\omega + \hbar|n|\omega_H$: изменение кинетической энергии продольного движения осциллятора идет на излучение кванта $\hbar\omega$ и на увеличение внутренней энергии осциллятора, т. е. энергии его вращения в магнитном поле. Если частица до излучения не обладала вращательной энергией, то в результате излучения кванта (при $n < 0$) она «закрутится». В случае пучка частиц аномальный эффект Допплера способствует его изотропизации, что и наблюдается экспериментально¹⁷. Наконец, случай $n = 0$ отвечает эффекту Вавилова — Черенкова: излучение кванта не сопровождается изменением вращательной энергии частицы. О роли рассмотренных явлений в физике плазмы см. работы^{2, 4, 11, 18}.

4. АНАЛОГИЯ: ГРАНИЦЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЭФФЕКТОВ

Теперь мы можем, наконец, обратиться к тому, что, согласно заглавию и введению, составляет основную цель данной статьи. Сопоставим три рассмотренных выше факта. 1) (гл. 2). Когда волна с отрицательной энергией раскачивает («излучает» *) другую волну с положительной энергией, сама она переходит в состояние с большей амплитудой колебаний, т. е. с большей энергией электрического поля. 2) (гл. 3). Система, движущаяся быстрее излучаемой ею волны, при излучении переходит в более возбужденное состояние, с большей внутренней энергией (аномальный эффект Допплера). 3) (гл. 1—3). Оба явления, указанные гл. 1 и 2, происходят при одной и той же дисперсионной ситуации, а именно — когда выполняется условие (2.5') $u > \omega/k_z$ **). В частности, дисперсия медленной волны электронного пучка, несущей отрицательную энергию и (при подходящих условиях) испытывающей неустойчивость в среде с положительной энергией, описывается соотношением

$$\omega - k_z u = -\omega_1, \quad (1.8)$$

совершенно аналогичным дисперсии

$$\omega - k_z u = -|n|\omega_H \quad (3.5)$$

при аномальном эффекте Допплера.

К этим фактам добавим еще один, связанный с так называемыми циклотронными волнами электронного пучка, используемыми в электронике СВЧ и физике плазмы^{5б, 7}. Дисперсия этих волн (поляризованных по кругу в плоскости поперечного сечения пучка) определяется диэлектрической постоянной

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_1^2}{(\omega - k_z u)^2 - \omega_H^2}; \quad (4.1)$$

*) Об «излучении» здесь говорится очень условно — с чисто энергетической точки зрения и только для подчеркивания рассматриваемой аналогии.

**) В (2.5') $k \equiv k_z$.

частоты волн определяются уравнением $\varepsilon = 0$: при $\omega_H \gg \omega_1$ *)

$$\omega - k_z u = \pm \omega_H \pm \frac{\omega_1^2}{2\omega_H},$$

т. е.

$$\omega - k_z u \approx \pm \omega_H, \quad (4.2)$$

где знак плюс относится к быстрой волне, а знак минус — к медленной. Видно, что дисперсия циклотронных волн (4.2) практически совпадает с условием (3.5) излучения ларморовского осциллятора. Из соотношений (1.2), (4.1) и (4.2) непосредственно видно, что быстрая волна, соответствующая нормальному эффекту Доплера ($\omega > k_z u$), несет положительную энергию, а медленная волна, отвечающая аномальному эффекту Доплера ($\omega < k_z u$) — отрицательную энергию.

Такая совокупность фактов позволяет со всей определенностью заключить, что между неустойчивостью «пучковой» волны с отрицательной энергией в среде с положительной энергией и аномальным эффектом Доплера существует прямая физическая аналогия. Различие между этими явлениями состоит в том, что аномальный эффект Доплера (в рассмотренном выше виде) — это процесс элементарный, а неустойчивость — процесс коллективный; в частности, внутренняя энергия системы в случае (3.5) есть вращательная энергия одной частицы, а в случае (1.8) — колебательная энергия коллектива частиц пучка. Но неустойчивость как раз и возникает в результате того, что один элементарный акт индуцирует следующие¹⁹. Поэтому рассматриваемую неустойчивость волны с отрицательной энергией можно трактовать как индуцированный аномальный эффект Доплера. Именно этот эффект лежит в основе неустойчивостей моноэнергетического электронного пучка, рассмотренных в гл. 2. Перечислим эти неустойчивости: 1) неустойчивость пучка в плазме (бесстолкновительная), 2) неустойчивость пучка в плазме (диссипативная), 3) бунемановская неустойчивость пучка на фоне подвижных ионов, 4) пучково-дрейфовая неустойчивость, 5) неустойчивость скользящих пучков (двухлучевая, или электронно-волновая лампа), 6) неустойчивость пучка в замедляющих структурах — генерирование и усиление СВЧ-колебаний в электронных приборах типа лампы с бегущей волной, 7) диссипативная неустойчивость пучка в системах типа резистивного усилителя СВЧ-колебаний.

Таким образом, если дисперсия «пучковой» системы оказывается такой, что фазовая скорость волн меньше скорости пучка (т. е. выполняется условие аномального эффекта Доплера), то можно с уверенностью сказать, что эта система неустойчива относительно раскачки двух волн, из которых одна несет отрицательную энергию, а другая — положительную. И наоборот, если неустойчивость системы объясняется с точки зрения концепции волн с отрицательной энергией, то за неустойчивость «ответствен» индуцированный аномальный эффект Доплера.

Аналогично аномальному эффекту Доплера существует индуцированный нормальный эффект Доплера и индуцированный эффект Вавилова — Черенкова^{2, 4, 18, 19}. Последний может быть назван обратным затуханием Ландау — по имени эффекта, играющего исключительную роль в физике плазмы^{20, 21}.

Теперь ко всему, что было изложено выше, нам необходимо сделать следующее принципиальное дополнение. Рассматривая пучковые неустойчивости, мы все время имели в виду случай так называемого «моноэнерге-

*) При $\omega_1 \gg \omega_H$ получаются уже описанные волны объемного заряда пучка: $\omega - k_z u = \pm \omega_1$.

тического» пучка, имеющего достаточно малый разброс электронов по скоростям, когда все электроны пучка движутся быстрее, чем возбуждаемая ими волна (рис. 3, а). Такой режим пучка принято называть гидродинамическим²², в этом режиме $u > \omega/k_z$, и имеет место аномальный эффект Доплера. Возникает, однако, вопрос: что будет, если разброс электронов пучка по скоростям перестанет быть «достаточно малым», и условие $u > \omega/k_z$ (для всех электронов!) перестанет выполняться, как это показано на рис. 3, б? Дадим ответ на этот вопрос, ограничиваясь случаем одномерного движения ($\mathbf{k} = \mathbf{k}_z$). Оказывается, что в режиме с большим разбросом пучка по скоростям (этот режим носит название кинетического²²) ситуация радикально меняется: во-первых, исчезает аномальный эффект Доплера, во-вторых (одновременно) перестает возбуждаться пучковая волна с отрицательной энергией — она затухает*). Такое совпадение — одновременное исчезновение аномального эффекта Доплера и неустойчивости (раскачки) волны с отрицательной энергией, естественно, не является случайным и еще раз свидетельствует о существовании глубокой физической аналогии между этими двумя явлениями.

Граница между гидродинамическим и кинетическим режимами пучка соответствует (предельному) разбросу по скоростям**)

$$\frac{\Delta u}{u} \approx \frac{|\omega - k_z u_0|}{k_z u_0}. \tag{4.3}$$

Это означает (согласно (1.8), (2.2) и (2.8)), что

$$\frac{\Delta u}{u_0} = \left(\frac{n_1}{n_e} \right)^{1/3} \tag{4.3'}$$

в случае пучка в (бесстолкновительной) плазме,

$$\frac{\Delta u}{u_0} = \left(\frac{m}{M} \right)^{1/3} \tag{4.3''}$$

в случае одномерного пучка на фоне подвижных ионов,

$$\frac{\Delta u}{u_0} \approx \frac{\omega_1}{k_z u_0} \approx \frac{\omega_1}{\omega} \tag{4.3'''}$$

в случае пучка в лампе с бегущей волной, резистивном усилителе и аналогичных устройствах электроники СВЧ.

Если разброс пучка по скоростям Δu превышает указанный предел, то неустойчивость пучка в плазменных средах не исчезает совсем, но раскачивается уже другим (кинетическим) механизмом — индуцированным эффектом Вавилова — Черенкова^{2, 4, 22} — это согласно рис. 3, б как раз и соответствует выполнению черенковского условия $\omega/k_z u = 1$. Следовательно, эффект Вавилова — Черенкова начинает «работать» там, где

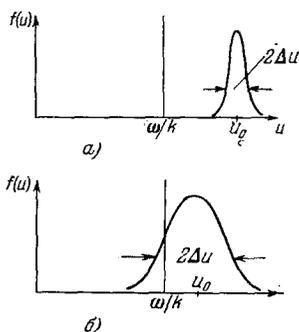


Рис. 3. а) Гидродинамический режим пучка $\Delta u < u_0 - (\omega/k_z)$; б) кинетический режим пучка, $\Delta u > u_0 - (\omega/k_z)$ (в данном случае $k = k_z$).

*) Рассмотрение кинетического режима пучка мы опускаем, поскольку оно не соответствовало бы общему стилю данной статьи. Строгое и ясное изложение этого круга вопросов дано в монографии⁵. Кинетическая неустойчивость пучка в случае трехмерного движения при условии $\omega - k_z u = -n\omega_H$ — аномального эффекта Доплера теоретически исследована в работах²⁵.

**) Величину Δu можно принять приблизительно равной полуширине функции распределения электронов $f(u)$ на половине ее амплитуды (см. рис. 3).

исчезают условия для неустойчивости (раскачки) волн с отрицательной энергией. По этой причине этот эффект, в частности, не имеет отношения к механизму действия лампы с бегущей волной и аналогичных устройств электроники СВЧ, которые, как было показано выше, «работают» на неустойчивости волн с отрицательной энергией, т. е. на индуцированном аномальном эффекте Доплера.

Укажем на еще один пример, иллюстрирующий рассматриваемую аналогию. Известно, что в кинетическом режиме пучка, проходящего сквозь плазму, столкновения плазменных электронов приводят к затуханию пучковой неустойчивости^{4, 5, 106}. Уже это одно свидетельствует о положительном знаке энергии волн, раскачиваемых в этом режиме системы пучок — плазма. В самом деле, если бы система обладала отрицательной энергией волн, то столкновения электронов плазмы приводили бы не к затуханию, а к раскачке неустойчивости, — как это было показано в разделе 3 на примере диссипативной неустойчивости пучка в плазме и в резистивном усилителе. Здесь также имеет место закономерное совпадение двух обстоятельств: во-первых, энергия волн оказывается положительной; во-вторых, согласно рис. 3, отсутствуют условия для аномального эффекта Доплера.

Наличие непосредственной связи между индуцированным аномальным эффектом Доплера и неустойчивостью волн с отрицательной энергией лежит в основе очень красивой идеи²⁴ коллективного ускорения ионов до релятивистских энергий в мощных высоковольтных электронных пучках. По этой идее ускорение производится медленной циклотронной волной (4.2), амплитуда которой нарастает во времени вследствие потери энергии на ускорение ионов (в соответствии с характером влияния диссипации на волну с отрицательной энергией). Ускорение происходит в постепенно спадающем магнитном поле, вследствие чего фазовая скорость медленной волны ω/k_z возрастает, стремясь к скорости электронов (релятивистского) пучка, т. е. к скорости света.

Наконец, в том же плане отметим, что в очень интересных опытах²³ по генерированию СВЧ-колебаний сверхвысокой мощности интенсивными релятивистскими пучками в пространственно модулированном магнитном поле также имеет место указанное выше совпадение: во-первых, отсутствует аномальный эффект Доплера (поскольку $\omega > k_z u$), во-вторых, энергия волн объемного заряда, раскачиваемых закрученным в спираль пучком (и определяющих его когерентное излучение), оказывается положительной²³.

Таким образом, все рассмотренные здесь примеры дополнительно иллюстрируют и подтверждают сделанный выше вывод о глубокой физической аналогии между индуцированным аномальным эффектом Доплера и неустойчивостью волн с отрицательной энергией в «пучковых» диспергирующих средах.

Автор выражает признательность М. А. Леонтовичу, Б. Б. Кадомцеву и А. В. Тимофееву за полезные обсуждения.

Институт атомной энергии
им. И. В. Курчатова

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, И. М. Франк, ДАН СССР 56, 699, 583 (1947).
И. Е. Тамм, УФН 68, 387 (1959).
И. М. Франк, *ibid.*, стр. 397.
2. В. Л. Гинзбург, УФН 69, 537 (1959); Теоретическая физика и астрофизика, М., «Наука». 1975.

3. Б. Б. Кадомцев, А. Б. Михайловский, А. В. Тимофеев, ЖЭТФ 47, 2266 (1964).
4. Я. Б. Файнберг, АЭ 11, 313 (1961).
5. А. Б. Михайловский, Теория плазменных неустойчивостей, т. 1, М., Атомиздат, 1970, а) §§ 2.2 и 2.3; б) гл. 8, 9.
6. А. А. Иванов, В. В. Паррил, Т. К. Соболева, ЖЭТФ 63, 1678 (1972).
7. У. Люкиселл, Связанные и параметрические колебания в электронике, М., ИЛ, 1963.
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М., Гостехиздат, 1957, §§ 62, 64.
9. Р. Бриггс, в кн. Достижения физики плазмы, М., «Мир», 1974, стр. 132—171.
10. а) А. И. Ахиезер, Я. Б. Файнберг, ЖЭТФ 21, 1262 (1951).
б) D. Bohm, E. Gross, Phys. Rev. 75, 1851 (1949).
11. А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев, УФН 73, 701 (1961).
12. О. Вунеман, Phys. Rev. 115, 503 (1959).
13. М. В. Незлин, УФН 102, 105 (1970).
14. L. J. Chu, in: Electron Tube Research Conference of IRE Durham, N. H., 1951.
15. C. K. Birdsall, G. R. Brewer, A. V. Naeff, Proc. IRE 41, 865 (1953).
16. А. V. Naeff, ibid. 37, 4 (1949).
17. Е. Г. Шустин, В. П. Попович, И. Ф. Харченко, ЖЭТФ 59, 657 (1970).
18. В. Д. Шафранов, в кн. Вопросы теории плазмы, под ред. М. А. Леонтовича, т. 3, М., Атомиздат, 1963, § 5.
19. В. Н. Цытович, Нелинейные эффекты в плазме, М., «Наука», 1967.
20. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ 16, 574 (1946).
21. Б. Б. Кадомцев, УФН 95, 111 (1968).
22. Я. Б. Файнберг, В. Д. Шапиро, В. И. Шевченко, ЖЭТФ 57, 966 (1969).
23. Y. Carmel, J. A. Nation, J. Appl. Phys. 44, 5268 (1973).
24. M. L. Sloan, W. E. Drummond, Phys. Rev. Lett. 31, 1234 (1974).
25. Б. Б. Кадомцев, О. П. Погуде, ЖЭТФ 53, 2025 (1967).
В. Д. Шапиро, В. И. Шевченко, ЖЭТФ 54, 1187 (1968).
В. В. Паррил, О. П. Погуде, Физика плазмы 2, 228 (1976).