УДК 539.538

РАСЧЕТ ТОЛЩИНЫ ТЕПЛОВОГО СЛОЯ В ПОВЕРХНОСТНЫХ СЛОЯХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ КРАТКОВРЕМЕННОГО ИНТЕНСИВНОГО ТРЕНИЯ

В. А. Балакин

(Гомель)

Необходимость расчета толщины теплового слоя в поверхностных слоях различного рода элементов конструкций и деталей машин, механизмов и приборов, работающих в условиях кратковременных тепловых воздействий, возникает при рассмотрении ряда инженерных задач, например при анализе температурного режима работы тормозных устройств [6, 7], высокоскоростных узлов трения [1], фрикционных передач и муфт сцепления [8], тяжело нагруженных зубчатых передач и кулачковых механизмов [3], при анализе влияния нагрева на прочность и «живучесть» артиллерийских стволов в процессе выстрела [4, 10], при решении вопросов оплавления трущихся тел на границе фрикционного контакта [1], оплавления головных частей гиперзвуковых ракет и снарядов от аэродинамического нагрева [9] и т. п.

Скорость распространения тепла теплопроводностью в твердых телах большая, например у алюминия она равна ~3000 м/с [5]. Однако при рассмотрении кратковременных процессов теплопередач обычно определяют размер областей (толщину теплового слоя), в которых в данный момент времени сосредоточено основное количество тепла.

Так, в работе [4], учитывая влияние нагрева на прочность артиллерийских стволов в процессе выстрела, толщину теплового слоя определяют по формуле $\delta=(2/\sqrt{\pi})\sqrt{at}$, где δ — толщина теплового слоя, a — температуропроводность, t — время.

Для случаев кратковременных торможений, когда $\delta<b$ (где b — толщина фрикционной колодки), рекомендуется следующее выражение для расчета δ [6]: $\delta=1{,}73\sqrt{at}$.

В работах [6, 7] вводится понятие теплового насыщения поверхностных слоев, которое определяется отношением

$$H=\frac{\vartheta(0, t_т)\, b\to\infty}{\vartheta(0, t_{\max})} \tag{1}$$

где $\vartheta(0, t_т)_b$ — температура на поверхности трения рассматриваемого элемента фрикционной пары толщиной b в момент времени $t=t_т$, соответствующий концу торможения; $\vartheta(0, t_{\max})$ — максимальная температура поверхности трения, возникающая в процессе торможения в некоторый момент времени $t_{\max}$.

Исходя из выражения (1) делается вывод [7] о том, что значение $\vartheta(0, t_{\max})$ зависит от толщины поверхностного слоя, участвующего в данный момент времени в теплопоглощении. Эффективная толщина этого слоя определяется зависимостью [7]

$$\delta=1{,}75\sqrt{at}. \tag{2}$$

Максимальная же толщина слоя, на который оказывает влияние поверхностная температура, равна [7]

$$\delta=3\sqrt{at}. \tag{3}$$

Выражения (2) и (3) получены из анализа тепловых процессов в тормозах автомобилей, самолетов и железнодорожных вагонов при числах Фурье $0<F_0<4$. Таким образом, в общем случае можно записать формулу для δ [2]

$$\delta=k\sqrt{at}, \tag{4}$$

где k — некоторый числовой коэффициент, от выбора которого зависит точность решения рассмотренных выше инженерных задач.

Выбор коэффициента k в каждом конкретном случае зависит от того, какое физическое обоснование положено в основу понятия толщины теплового слоя. В инженерной практике оно может быть связано с фиксированием резких изменений механических свойств и температуры поверхностных слоев рассматриваемого тела в заданном направлении либо связано с понятием аккумуляции тепла слоем толщиной δ. При этом могут быть использованы безразмерные отношения $\sigma_b/\sigma_{b\delta}$, $\vartheta(\delta,t)/\vartheta(0,t)$, $Q_{\text{ак}\delta}/Q_{\text{ак}}$, где σ_b, $\sigma_{b\delta}$ — пределы прочности материала на поверхности и глубине δ; $\vartheta(\delta,t)$, $\vartheta(0,t)$ — температуры в слое на расстоянии δ от поверхности и на поверхности; $Q_{\text{ак}\delta}$, $Q_{\text{ак}}$ — количества тепла, аккумулированные слоем толщиной δ и рассматриваемым телом толщиной $b>\delta$.

Прочностные свойства материалов в условиях интенсивного нагрева зависят от температуры, поэтому их изменение в поверхностном слое в рассматриваемый момент времени (например, при $t=t_T$) можно выразить отношением $\sigma_b(\vartheta(0,t_T))/\sigma_b(\vartheta(\delta,t_T))$.

Значение $\sigma_b(\vartheta(\delta,t_T))$ целесообразно выбирать для температуры, при которой еще сохраняются механические свойства данного материала. Например, у сталей для температуры $\vartheta(\delta,t_T)\approx 0{,}3\,T_{\text{пл}}$, где $T_{\text{пл}}$ — температура плавления стали. Таким образом, изменение прочностных свойств материала в поверхностном слое связано с отношением $\vartheta(\delta,t)/\vartheta(0,t)$. Следовательно, при выборе коэффициента k необходимо проводить анализ безразмерных величин $\vartheta(\delta,t)/\vartheta(0,t)$ либо $Q_{\text{ак}\delta}/Q_{\text{ак}}$. В общем случае эти отношения зависят от направления и интенсивности тепловых потоков, теплофизических характеристик материалов и времени.

Так как нас интересуют кратковременные процессы теплопередачи, то тела можно рассматривать как полубесконечные, тепловые потоки — линейными, направленными по нормали к поверхности, и теплоотдачей в окружающую среду можно пренебречь. Тогда количество тепла, поглощенное телом через поверхность площадью A_a, равно

$$Q_{\text{ак}}=A_a c\gamma\int_0^\infty \vartheta(z,t)\,dz, \tag{5}$$

где c — теплоемкость, γ — плотность.

В слое толщиной δ содержится количество тепла

$$Q_{\text{ак}_\delta}=A_a c\gamma\int_0^\delta \vartheta(z,t)\,dz. \tag{6}$$

Поделив (6) на (5), получаем

$$\frac{Q_{\text{ак}\delta}}{Q_{\text{ак}}}=\frac{\int_0^\delta \vartheta(z,t)\,dz}{\int_0^\infty \vartheta(z,t)\,dz}. \tag{7}$$

Выражение (7) показывает, какое количество тепла по отношению ко всему теплу, поглощенному полубесконечным телом, содержится в слое толщиной δ.

При проведении анализа принимаем, что тепловой поток, направленный перпендикулярно к плоской границе полубесконечного тела, является постоянным (q=const). Тогда температурное поле в поверхностном слое полубесконечного тела описывается уравнением [5]

$$\vartheta(z,t)=\vartheta_0+\frac{2q\sqrt{at}}{\lambda}\,\mathrm{ierfc}\,\frac{z}{2\sqrt{at}}, \tag{8}$$

где ϑ_0 — начальная температура, λ — коэффициент теплопроводности.

Воспользовавшись уравнением (8) и принимая $\vartheta_0=0°$, найдем интегралы, находящиеся в правой части выражения (7)

$$\int_0^\delta \vartheta(z,t)\,dz=\frac{2q\sqrt{at}}{\lambda}\int_0^\delta \mathrm{ierfc}\,\frac{z}{2\sqrt{at}}\,dz=$$

$$=\frac{2q\sqrt{at}}{\lambda}\int_0^\delta\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4at}}-\frac{z}{2\sqrt{at}}\underbrace{\left(1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{z}{2\sqrt{at}}}e^{-u^2}du\right)}_{J_1}\right]dz. \tag{9}$$

Интеграл J_1 называется функцией ошибок Гаусса, его численное значение определяется по таблице Маркова [5] в зависимости от значения $z/2\sqrt{at}$.

Так как $z=\delta=k\sqrt{at}$,

$$J_1=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{k}{2}}e^{-u^2}du.$$

Численные значения интеграла J_1 в зависимости от величины k приведены в табл. 1.

Таблица 1

k	1	2	3	4	5	6
J_1	0,5205	0,8427	0,9661	0,9953	0,9996	1

Уравнение (9) можно переписать в виде

$$\int_0^\delta \vartheta(z,t)\,dz=\frac{2q\sqrt{at}}{\lambda}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\delta e^{-\frac{z^2}{4at}}dz-\frac{1-J_1}{2\sqrt{at}}\int_0^\delta z\,dz\right)=$$

$$=\frac{2q\sqrt{at}}{\lambda}\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\delta e^{-\frac{z^2}{4at}}dz}_{J_2}-\frac{1-J_1}{2\sqrt{at}}\,\frac{z^2}{2}\Big|_0^\delta\right). \tag{10}$$

Обозначив через $u=z/2\sqrt{at}$, $du=dz/2\sqrt{at}$, получаем

$$J_2=\sqrt{at}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\delta e^{-u^2}du.$$

Окончательно переписывая (10) с учетом (4), имеем

$$\int_0^{\delta} \vartheta(z, t)\, dz = \frac{2qat}{\lambda}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{k\sqrt{at}} e^{-u^2} du - \frac{1 - J_1}{4} k^2\right). \tag{11}$$

Интегрируя правую часть уравнения (8) в пределах от 0 до ∞ (с учетом $\vartheta_0 = 0°$), получаем

$$\int_0^{\infty} \vartheta(z, t)\, dz = \frac{2q\sqrt{at}}{\lambda} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4at}} - \frac{z}{2\sqrt{at}}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du\right)\right] dz = \frac{2qat}{\lambda}. \tag{12}$$

Подставляя (11) и (12) в (7), имеем

$$\frac{Q_{\text{ак}_\delta}}{Q_{\text{ак}}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int^{k\sqrt{at}} e^{-u^2} du - \frac{1 - J_1}{4} k^2. \tag{13}$$

Таким образом, процентное содержание аккумулированного тепла в некотором слое толщиной δ полубесконечного тела зависит от выбранного значения k и времени действия теплового потока.

В тех случаях, когда возникает необходимость определения процентного содержания тепла в поверхностном слое тела толщиной b (причем $b > \delta$) при $q = \text{const}$, то его на основе (9) и (11) можно вычислить из выражения

$$\frac{Q_{\text{ак}_\delta}}{Q_{\text{ак}_b}} = \frac{\int_0^{\delta} \vartheta(z, t)\, dz}{\int_0^{b} \vartheta(z, t)\, dz} = \frac{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{bk\sqrt{F_0}} e^{-u^2} du - \frac{1 - J_1}{4} k^2}{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{b} e^{-u^2} du - \frac{1 - J_3}{4F_0}}, \tag{14}$$

где

$$J_3 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\sqrt{F_0}} e^{-u^2} du.$$

Значения интеграла J_3 в зависимости от числа Фурье приведены в табл. 2.

Формула (14) справедлива лишь для случаев, когда $\delta < b$ ($k\sqrt{F_0} < 1$). При $b \to \infty$ знаменатель в выражении (14) стремится к единице.

Анализ толщины теплового слоя в зависимости от отношения $\vartheta(\delta, t)/ /\vartheta(0, t)$ выполнен в работе [3]. При этом принимается, что тело является полубесконечным, тепловой поток постоянной интенсивности направлен перпендикулярно к его плоской границе. Тогда отношение температур в этом случае можно записать в виде

$$\frac{\vartheta(\delta, t)}{\vartheta(0, t)} = \sqrt{\pi}\, \text{ierfc}\, \frac{k}{2}. \tag{15}$$

Отсюда видно, что при $q = \text{const}$ относительная температура на глубине $\delta = k\sqrt{at}$ данного тела определяется лишь значениями коэффициента k и не зависит от времени.

Числовые значения k в зависимости от отношения $\vartheta(\delta, t)/\vartheta(0, t)$ приведены в табл. 3 [3].

Таблица 2

F_0	0,01	0,05	0,1	0,3	0,5	0,8	1
J_3	1	0,998	0,974	0,858	0,685	0,571	0,520

Таблица 3

$\frac{\vartheta(\delta, t)}{\vartheta(0, t)}$	0,01	0,05	0,1	0,2	0,4	0,6
k	3,2	2,4	1,94	1,44	0,9	0,54

Таблица 4

k	F_0					
	0,1	0,2	0,3	0,5	0,8	1
1	0,225	0,351	0,441	0,562	0,676	0,722
2	0,471	0,634	0,723	0,797	0,832	0,838
3	0,643	0,856	0,903	0,921	0,923	0,924
4	0,907	0,969	0,978	0,979	0,980	0,980
5	0,972	0,996	0,997	0,998	0,998	0,998
6	0,993	0,998	0,999	0,9999	0,9999	0,9999

Таблица 5

k	F_0							
	0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,5	0,8	1
1	0,028	0,152	0,290	0,500	0,600	0,960	0,983	1,000
2	0,078	0,380	0,605	0,910	–	–	–	–
3	0,299	0,696	0,965	–	–	–	–	–
4	0,483	0,930	–	–	–	–	–	–
5	0,613	–	–	–	–	–	–	–
6	0,715	–	–	–	–	–	–	–

Таблица 6

k	1	2	3	4	5	6
F_0	1,00	0,25	0,11	0,063	0,040	0,028

Пример 1. Полубесконечное тело нагревается кратковременным постоянным по величине тепловым потоком. Характерным размером по оси z выбран $b=1$ см. Требуется рассмотреть динамику процесса аккумуляции тепла в поверхностном слое тела в зависимости от времени и выбрать значения k для расчета δ. Воспользовавшись выражением (13), вычисляем отношения $Q_{ак\delta}/Q_{ак}$ для разных k и F_0.

Из данных, приведенных в табл. 4, видно, что процесс аккумуляции тепла в поверхностном слое толщиной $\delta=k\sqrt{at}$ при заданном k зависит от времени F_0. Если надо определить режимы нагрева тела при $F_0>0,5$, то, приняв условие о содержании основного количества тепла в слое толщиной δ, например $Q_{ак\delta}/Q_{ак}>0,8$, имеем $k=2$. Воспользовавшись же данными табл. 3, видим, что при $k=2$ $\vartheta(\delta, t)\approx 0,1\vartheta(0,1)$. При малых F_0 условие о содержании основного количества тепла в слое толщиной δ достигается при $k\geqslant 3$.

Пример 2. Фрикционный элемент пары трения толщиной $b=1$ см нагревается тепловым потоком $q=const$. *Необходимо выбрать значение k.* Воспользовавшись выражением (14), вычисляем отношение $Q_{ак\delta}/Q_{ак b}$ для разных k и F_0 (табл. 5).

Отношение $Q_{ак\delta}/Q_{ак b}>0,8$ достигается при: $k=4$, если $F_0=0,05$; $k=3$, если $F_0=0,1$; $k=2$, если $F_0=0,2$. Если $\delta=b$, то $k\sqrt{F_0}=1$, что соответствует значениям k и F_0 из табл. 6.

При $F_0<0,01$ данные табл. 4 и 5 практически совпадают.

Пример 3. Выбрать значение k для расчета толщины теплового слоя в канале ствола артиллерийского орудия, если $\vartheta(0, t)=T_{пл}$, а допустимая температура $\vartheta(\delta, t)=0{,}3T_{пл}$. Пользуясь данными табл. 3, находим, что отношению температур $\vartheta(\delta, t)/\vartheta(0, t)=0{,}3$ соответствует $k=1{,}17$. В работе [4] принято $k=2/\sqrt{\pi}=1{,}13$. Как видно, сходимость достаточно высокая.

Следует еще раз отметить, что формулы (13)–(15) получены при $q=\mathrm{const}$. Такое допущение позволяет количественно оценить особенности тепловых процессов в поверхностных слоях тел при малых числах Фурье.

В тех случаях, когда тепловой поток изменяется во времени, необходимо решать тепловую задачу при конкретных граничных условиях второго рода, т. е. находить температурное поле $\vartheta(z, t)$, значения $Q_{ак_\delta}$, $Q_{ак_b}$ и отношения $Q_{ак_\delta}(t)/Q_{ак_b}(t)$ и $\vartheta(\delta, t)/\vartheta(0, t)$.

Правильность определения толщины теплового слоя δ и скорости его распространения $\dot{\delta}$ в глубь тела играет важную роль при решении задач с изменением агрегатного состояния вещества (задач Стефана), позволяя использовать такой простой метод, как метод интеграла теплового баланса.

Поступила 30 X 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Балакин В. А.* Трение и износ металлов при высоких скоростях скольжения. В кн.: Трение, изнашивание и смазка. Кн. 1. М., «Машиностроение», 1978.
2. *Балакин В. А.* Основы прочности поверхностного слоя. Изд-во Гомельск. гос. ун-та, 1974.
3. *Дроздов Ю. Н.* Тепловой аспект проблемы задира (заедания) катящихся со скольжением тел. Машиноведение, 1972, № 2.
4. *Ильюшин А. А., Огибалов П. М.* Упругопластические деформации полых цилиндров. М., Изд-во Моск. гос. ун-та, 1960.
5. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. М., «Высшая школа», 1967.
6. *Чичинадзе А. В.* Расчет и исследование внешнего трения при торможении. М., «Наука», 1967.
7. *Fazekas G. A.* Temperature gradients and Heat Stresses in Brake Drums.– SAE Trans., 1953.
8. *Hasselgruber H.* Der Schaltvorgang einer Trockenreibungs Kupplung bei Kleinster Erwärmung. Konstruktion, 1963, Hf. 2.
9. *Landaw H. G.* Heat conluction in a melting solid. Quarterly applied mathematics, 1950, vol. 8, № 1.
10. *Montgomery R. S.* Muzzle wear of cannon. Wear, 1975, vol. 33, № 2.